FONDO PIZZOFALCONE

29452

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio VI

Palchetto

Num.° d' ordine 18

NAZIONALE
B. Prov.
I
572
VITT. EM. III
NAPOLI

B.P
I
572-573

C006738
SBN

RACCOLTA

DI TEORIE DIVERSE

Esposte sotto l' enunciazione di quei Problemi che son dati a risolvere nelle Lezioni di Matematiche dell' Ab. Marie

DEL

CAV. SAMMARTINO

Tomo I.

CATANIA 1808.

NELLE STAMPE DEL BISAGNI

CON APPROVAZIONE.

AL SIGNORE

D. VINCENZO PATERNÒ CASTELLO

DUCA DI CARCACI EC. EC.

BIBLIOTECA PROVINCIALE di NAPOLI

SIGNORE

I Tratti replicati delle voſtre Virtù vi han dato un dritto, o Signore, alla pubblica riconoſcenza. In Voi Catania mia Patria ha un eſempio continuo di beneficenza e giuſtizia: in Voi l' indigenza trova una mano che la ſolleva e ſoccorre.

Nel preſentarvi adunque queſto mio aſſai tenue ed imperfetto lavoro, io intendo manifeſtare, o Si-

Signore, quei sentimenti di gratitudine, che ogni Cittadino sensibile dee all' uomo giusto e virtuoso. Accettatelo intanto Voi, qualunque esso sia: ed accettatelo solo in tributo di ciocchè vi si dee per giustizia. Mettetelo sotto la protezione del Nome vostro onde sostenere, nò co' titoli dell' umana grandezza, di cui siete abbastanza ricolmo, ma co' caratteri più imponenti della vera virtù, quello dell' Autore. E credetemi, qual io mi dichiaro con ogni ossequio

Signore

Catania a 5. Settemb. 1806.

Devotiss. Obb. servidore
Agatino Sammartino

AVVERTIMENTO

Cinque edizioni che nel corto periodo di circa vent' anni si son fatte nella sola Firenze delle lezioni elementari di Matematiche dell' Ab. Marie ne formano senza contrasto l' elogio il più compiuto e perfetto. In queste lezioni si trovano alla fine di ogni trattato proposti a risolvere de' problemi onde servire, dicono gli editori Fiorentini, di esercizio agli studiosi, e di compimento a quelle teorie, che la picciolezza del volume non ne permise loro il dettaglio. Il libro che comparisce alla luce non promette a primo aspetto che la soluzione di questi problemi: ma esso non è in fondo però che un supplemento a queste lezioni, ed una raccolta insieme di teorie diverse sulle matematiche pure.

Sotto l' enunciazione in effetto di tali problemi si trovano esposte le teorie principali le teorie più sublimi le più che interessano questa parte delle Matematiche: teorie trattate in maniera, che formando de' saggi completi più o meno estesi secondo la grandezza del soggetto,

ſuppliſcano nel tempo ſteſſo al difetto delle lezioni che io ho preſo di mira, ed a cui nelle citazioni occorrenti io mi rapporto: teorie che tutte conchiudo con applicarle al caſo dell'enunciazioni che vi han dato argomento: teorie finalmente, per vederne la cui ſpecie io rimetto il lettore alla tavola delle materie, ed alle pagine dell' intiera raccolta per più da vicino conoſcerne l' individual contenuto.

Le teorie, cui le ventiſei enunciazioni propoſte ſulle due parti del Calcolo differenziale avrebbero dato principio, è che doveano chiudere queſto mio qualunque ſiaſi libro. Ma ſiccome queſto calcolo ha oggi ſofferto fra le mani del noſtro immortale Lagrange de' cambiamenti radicali e notabili, di cui non ſi parla nelle lezioni che abbiamo di mira a ſupplire; così avrei creduto mancare all'eſattezza, ed al compimento del piano, non venendo ad eſporre queſti cambiamenti, che tanto intereſſano. Tale fu la ragione, che determinato mi avea di finirlo in un opuſcolo ſull' analiſi derivata, onde abbracciarne la parte, che con eſſe ha relazione e rapporto. Ma riflettendo, che queſto Opuſcolo

non potea eſſere sì limitato e finito, e che avrebbe perciò troppo ingrandito il preſente Volume; che le nuove teorie non avrebbero potuto eſſervi a perfezione trattate; e che ſupplendo alle mancanze delle lezioni, la gioventù mai avrebbe avuto con eſſo un corſo regolato ed uniforme ſu queſta parte di analiſi, onde ſperarne de' pronti e felici ſuccessi: fece che io ne aveſſi il materiale impiegato in un corſo di Analiſi ſublime ſu di cui ſtò lavorando, e che avrà per titolo: *Lezioni ſulla derivazione diretta ed inverſa delle funzioni Analitiche, oſſia Corſo ragionato di Calcolo differenziale e integrale*: corſo che ſarà concepito in maniera che ſervendo di compimento e dilucidazione a quello delle lezioni, e così ſupplendo al mancante in queſto mio libro, formaſſe inſieme un trattato tutto a ſe indipendente ſu quella parte di Analiſi.

Accolga adunque per ora la gioventù ſtudioſa il preſente Volume, che da circa due anni le avrei dedicato, ſe la difficoltà di quì oggi ſtampare queſte materie non me lo aveſſe impedito, ed aſpetti al più preſto che le circoſtanze

mie permetteranno, ciocchè le ho promesso e av-
visato.

N. B. Le citazioni precedute dalla lettera *I* chiamano alla quarta Edizione Fiorentina delle lezioni: Quelle isolate, e sole citano a questo libro.

Colla frase poi *Autore delle lezioni* io intendo indistintamente indicare tanto l' Autore Originale, che gli Editori Fiorentini; ignorando ciocchè all' uno e ciocchè agli altri appartiene.

Teorie esposte sotto l'enunciazione de' Problemi delle Lezioni proposti al fine dell' Algebra.

PROB. 1.

Come dimostrerete che il comun divisore trovato colla regola data (l. 56.) *è un massimo?*

1. LA regola onde trovare il massimo comun divisore di un dato rotto consiste nel dividerne il termine più grande pel più piccolo: quindi per l'avanzo che se ne è avuto: quindi questo avanzo pel nuovo avanzo, e così in appresso fino all' avanzo $=$ o. L' avanzo precedente al zero è il cercato massimo comun divisore.

Se ricorriamo a quanto si dice (55) resteremo tosto convinti che il progresso di questa regola non è che l' operazione onde sviluppare in continue il dato rotto ordinario. Possiamo adunque ripetere da questo numero la proposta dimostrazione.

In effetto sia $\frac{B}{A}$ il rotto proposto, e sia assunta (56) la tavola.

$$B = A\,l + r$$
$$A = r\,l' + r'$$
$$r = r'\,l' + r''$$
$$r' = r''\,l''' + r'''$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$r^{(n-2)} = r^{(n-1)}\,l^{(n)} + r^{(n)}$$

delle parti onde si effettua quell' evoluzione, e perciò di quelle che si hanno nel progresso della regola in questione. Mettiamo quindi nel valore di B ed A successivamente quei di A, r, r', r'',.... $r^{(n-2)}$, e di r, r', r''... $r^{(n-1)}$, e ne avremo le due tavole seguenti.

Tav. de' valori di B.

$$B = Al + r$$
$$B = r(ll' + 1) + r'l$$
$$B = r'((ll' + 1)l'' + l) + r(ll' + 1)$$
$$B = r''(((ll' + 1)l'' + l)l''' + ll' + 1) + r'''((ll' + 1)l'' + l)$$
$$B = r'''(((ll' + 1)l'' + l)l''' + ll' + 1)l^{IV} + (ll' + 1)(l'' + l)$$
$$+ r^{IV}(((ll' + 1)l'' + l)l''' + ll' + 1)$$
$$B = \text{ec.}$$

Ovvero (50)

$$B = AM + r$$
$$B = rM' + r'M$$
$$B = r'M'' + r''M'$$
$$B = r''M''' + r'''M''$$
$$B = r'''M^{IV} + r^{IV}M'''$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$B = r^{(n-1)}M^{(n)} + r^{(n)}M^{(n-1)}$$

Tav. de' valori di A

$$A = rl' + r'$$
$$A = r'(l'l'' + 1) + r''l$$
$$A = r''((l'l'' + 1)l''' + l') + r'''(l'l'' + 1)$$
$$A = r'''((l'l'' + 1)l''' + l')l^{IV} + l'l'' + 1) + \cdots$$
$$r^{IV}((l'l'' + 1)l''' + l')$$
$$A = \text{ec.}$$

Ovvero (50)

$$A = A$$
$$A = rN' + r'N$$
$$A = rN'' + r''N'$$
$$A = r'N''' + r'''N''$$
$$A = r'''N^{IV} + r^{IV}N'''$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$A = r^{(n-1)}N^{(n)} + r^{(n)}N^{(n-1)}$$

Quindi prendendo da queste tavole l' espressioni omogenee, cioè le date negli stessi residui si avrà in generale $\frac{B}{A} = \frac{r^{(n-1)} M^{(n)} + r^{(n)} M^{(n-1)}}{r^{(n-1)} N^{(n)} + r^{(n)} N^{(n-1)}}$ da cui supposto che $r^{(n)}$ risulti $= 0$, se ne ha $\frac{B}{A} = -\frac{M^{(n)}}{N^{(n)}}$. Questa espressione del rotto proposto è quella che mi dà l'argomento a conchiudere che il residuo $r^{(n-1)}$ precedente all' $= 0$ è divisore tanto del numeratore, che del denominatore, e che ne è ancora il massimo per essere (52.2.) $M^{(n)}$, $N^{(n)}$ primi tra loro.

Noi abbiamo supposto improprio il rotto proposto: se fosse però un rotto proprio la dimostrazione sempre avrebbe il suo luogo, perchè non si avrebbe che a supporre soltanto $l = 0$. Di ciò sene potrà col fatto convincere operando nel modo stesso sulla seconda tavola del citato numero (56)

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI

Tavola pe' num. 3

(A)... $A^{m-3}+\ldots G\,10^3+H\,10^2+K\,10+$

(B)... $a^{m-3}+\ldots g\,10^3+h\,10^2+k\,10$

$aA\,10^{2m-3}D\,10^{2m-3}\ldots+aI\,10^m+aL\,10^n$

$bC\ldots \quad * bK \quad * bI$

II. $(A)+D\,10^{\ldots}+\ldots G\,10^3+H\,10^2+K\,1$

(B) $\frac{x}{10^{m-1}} + \frac{o}{10^{\ldots}}$

III. $(A\ldots D\,10^{m-3}+\ldots G\,10^3+H\,10^2+K\ldots$

(B) $\frac{z}{10^m}$

PROB. 2.

Dimoſtrare le Regole date a' numeri (*l.*78.79.83.)

2. LE Regole enunciate non ſi verſano che ſul modo di compendiare le operazioni molto lunghe della moltiplicazione e diviſione de' decimali quando ſi vuole nel riſultato una certa approſſimazione. Noi andiamo a dimoſtrare queſte due regole nella maniera la più generale, che ci ſarà poſſibile. Ci diſpenſiamo di enunciarle per ora; e ciò perchè lo faremo nel progreſſo della dimoſtrazione.

3. Incomincio dalla moltiplicazione, e prendo a tale oggetto le formole (*A*), (*B*) onde rappreſentare in un modo generale due fattori qualunque, e compoſti comunque d' interi e decimali, ed in cui con *A*, *B*, ec. *a*, *b*, ec. intendo notare qualſiſia delle cifre ſignificative de' numeri. Quindi paſſando a formarne il prodotto (*P*)(*P*) oſſervo che nella ſua formazione i termini del moltiplicatore (*B*) ſi ſon preſi da ſiniſtra a deſtra, e che ſe ſi aveſſero preſo da deſtra a ſi-

niſtra, cioè in ordine inverſo, ſe ne avrebbe ottenuto non ſolo il medeſimo riſultato, ma ordinando alle potenze ſcendenti di 10, un riſultato eziandio perfettamente identico, cioè compoſto delle medeſime linee verticali. Queſta oſſervazione mi permette a potere io ſcrivere in qualunque ſiaſi modo queſto moltiplicatore, e cercare di ſcriverlo ancora in maniera, che i prodotti parziali de' termini ſuoi con quei del moltiplicando, compreſi nella ſteſſa linea verticale del prodotto totale, abbiano una certa corriſpondenza ſimetrica in tutti i caſi.

4 Per poco che rifletto ſu queſto ſoggetto, mi avveggo che invertendo l' ordine de' termini di (*B*), e ſcrivendoli in maniera ſotto di (*A*) quanto quello delle unità vi corriſponda ſucceſſivamente ſotto quello de' decimi de' centeſimi de' milleſimi ec., ſcrivendo ſucceſſivamente cioè i due fattori nel modo che ſi veggono inſeriti nella tavola, ne avrò le due concluſioni ſeguenti.

I. La ſomma de' prodotti parziali di tutti i termini di (*B*) pe' corriſpondenti ſuperiori di (*A*) formano ſucceſſivamente in (*P*) (*P*) la linea verticale de' decimi de' centeſimi de' milleſimi ec.

II. Le linee verticali di eſſo oltre quella de' decimi nel primo, oltre quella de' centeſimi nel ſecondo, oltre quella de' milleſimi nel terzo, ec. caſo, non ſono che l' aggregato de' prodotti de' termini ſteſſi di (*B*) per quelli di (*A*) che gli reſtano a deſtra.

Quindi dico che volendo nel prodotto una certa approſſimazione di decimali „ baſta roveſcia„ re l' ordine delle cifre del moltiplicatore, e „ ſcriverle in maniera ſotto il moltiplican„ do quanto quella delle unità vi corriſpon„ da ſotto la indicante l' ordine decimale di „ ſtabilita approſſimazione: baſta traſcurare nel „ progreſſo dell' operazione tutte le cifre deci„ mali di detto moltiplicando che reſtano a de„ ſtra di quella del moltiplicatore per cui ſi mol„ tiplica: baſta portare finalmente ſotto l' ulti„ ma linea verticale la prima cifra di ogni nuo„ vo prodotto parziale.

5. Queſta regola generale che l' oſſervazione ci ha guidato a ſtabilire va ſoggetta a delle modificazioni, onde evitarne gli errori, cui ci andrebbe a portare.

Infatti la naturale confuſione delle cifre

numeriche fa che la prima linea verticale omessa in (*P*) (*P*) abbia sempre parte in un certo numero delle sue ultime cifre, le quali perciò non possono che risultarne false ed erronee. Se noi però limiteremo l' approssimazione cercata ad un certo numero di più decimali, allora eviteremo l' errore indicato. Quindi non si tratta che determinare all' incirca questo numero di più decimali, onde rettificare la regola stabilita, e così avere da essa un prodotto prossimamente esatto.

6. Il valore di ciascuna linea verticale di (*P*) (*P*) dipende dal numero de' termini che la compongono, e perciò dal numero delle cifre de' due fattori: inoltre nelle linee de' decimi, de' centesimi, de' millesimi, ... degli *uesimi* in generale, questo numero di termini ci viene espresso da $2m-1$, da $2m-2$ da $2m-3$, ... da $2m-u$: Finalmente preso il limite superiore per ciascuna delle cifre di questi fattori, cioè supposte tutte $=9$, se ne avrà in $(2m-u)\,8\,1$ l' espressione del massimo di tutti i valori di cui la linea generale u è capace. Quindi segue che dal numero delle cifre de' due fattori, e dall' ordine decimale cui

si

ſi vuol limitare il prodotto, dipende quello di più che ci abbiamo propoſto di ſtabilire. Quindi riſulta che eſſendo m, u tali quanto l'eſpreſſione $(2m-u)81$ abbia $v+1$ cifre, il numero cercato di più decimali dovrà eſſere $=v$, acciò non ſi poſſa commettere al più che una unità di errore nell'ultima cifra decimale del prodotto: Quindi finalmente avviene che ciò dee a forziore aver luogo per qualunque altro caſo, in cui può trovarſi ciaſcuna cifra de' fattori in queſtione, e che eſſendo $99\ldots v+1$ il limite ſuperiore de' numeri con $v+1$ cifre, potrà ſtabilirſi l'equazione indeterminata $(2m-u)\,81 = \ldots 999\ldots v+1$, onde determinare con eſſa il valore di m, cioè della quarta parte del numero di tutte le cifre de' fattori mercè la cognizione di u, e de' valori dati ad arbitrio ad v; ſi verrà io dico a determinare fino a qual numero di cifre de' due fattori avrà luogo l'aſſunto valore di v per l'approſſimazione u.

7. Noi poſſiamo applicarne queſta formula al caſo propoſto nelle lezioni, a quello cioè in cui $u=3$, $v=2$. In fatti avvertendo che nella formula $(2m-u)\,81 = 999\ldots v+1$ per u dee

prendesi $u+v$, poichè l'approssimazione u ne richiede v di più, si avrà $2m = 19$, cioè l'approssimazione a' millesimi nel prodotto si avrà esatta con tutta sicurezza limitandola a due decimali di più, sino che il numero dello cifre de' due fattori non oltrepassa 34.

Questo numero di 34 può divenir più grande secondo che più picciole di 9 sono le cifre di essi fattori: noi ne abbiamo veduto il perchè: Questo numero ancora diviene più grande quando il numero delle cifre tantò intere che decimali non è eguale, come abbiamo supposto, ne' due fattori. Noi andiamo a vedere di ciò la ragione.

8. A tale oggetto osservo che la mancanza della sola prima cifra A, o a in uno de' due fattori non influisce sulle linee verticali, indicanti in $(P)(P)$ le cifre decimali; che la mancanza delle sole due prime nell'uno o nell'altro diminuisce soltanto di un termine la linea de' decimi; che la mancanza delle prime tre annulla due termini nella linea dei decimi, ed un solo in quella de' centesimi; e così continuando arrivo a conchiudere che la mancanza delle pri-

me y, t cifre ne' due fattori diminuiſce ciaſcuno per parte ſua di $\frac{y-1}{t-1}$ il numero de' termini della linea de' decimi, di $\frac{y-2}{t-2}$ quello della linea de' centeſimi, di $\frac{y-3}{t-3}$ quello della linea de' milleſimi,..... ed in generale di $\frac{y-u}{t-u}$ quello della linea degli ueſimi: diminuzione che ha luogo fin quando $u < y-1$, $< t-1$.

Inoltre oſſervo che mancando un certo numero y' delle ultime cifre in uno de' due fattori (numero ſempre $< m$, poichè ſi ſuppone che abbia de' decimali) mancherà egualmente di y' il numero de' termini di ciaſcuna delle linee decimali, reſtandone annullate quelle, in cui tal numero di termini $< y'$

9. Se chiamiamo m il numero delle cifre decimali di uno de'due fattori, avremo in $m-y'$ quello delle cifre decimali dell'altro, ed in $m-y$, in $m-t$ quelli delle loro cifre intere, ed avremo perciò in $4m-(y+t+y')$ il numero totale

delle loro cifre . Offervo poi quattro caſi di pendenti dallo ſtato di u rapporto ad y, e t: caſi che io diſpongo per brevità in una tavola, cioè nella ſeguente

Stato di u rapp. ad y,t	Dim. della lin. $u^{eſime}$
$u \prec y, u \prec t$	$y + t + y' - 2u$
$u \prec y, u \succ t$	$y + y' - u$
$u \succ y, u \prec t$	$t + y' - u$
$u \succ y, u \succ t$	y'

num de' term. di eſſa	form. de' valori di eſſa
$2m - y - t - y' + u$	$(2m - y - t - y' + u)81 = 99..v + 1$
$2m - y - y'$	$(2m - y - y')81 = 99..v + 1$
$2m - t - y'$	$(2m - t - y')81 = 99..v + 1$
$2m - y' - u$	$(2m - y' - u)81 = 99..v + 1$

Si veda in queſta tavola che i due caſi intermedj ſono indipendenti di u, cioè il num. de' termini della linea, cui ſi limita l' approſſimazione non dipende dall' ordine decimale di eſſa. Si avverta intanto che vi ſi poſſono fare alcune rifleſſioni, che noi omettiamo, e ci baſta ſol-

tanto il prevenire che niente potrebbe con facilità pronunciarsi su di essi in generale; ma che i casi particolari applicati a quella delle quattro formule, che vi corrisponde, sarà il corso per cui potrà arrivarsi alla cognizione se ha luogo per essi l' assunto numero v di più decimali. Tanto ci basta per passare alla seconda parte di questo Problema, cioè al compendio della divisione de' decimali.

10. Io riguardo $(P),(A),(B)$ come il dividendo divisore, e quoziente di una divisione da eseguirsi. La regola ordinaria della divisione m' insegna h e essendo $2m$ le cifre del divisore, $2m$ dovranno ancora essere quelle da considerarsi nel dividendo, onde poterne incominciare l' operazione; e che quindi bisognerebbe successivamente aggiungere a' successivi residui le cifre che si son soppresse del dividendo dalla $(2m+1)$esima in poi. Questa regola è stata ridotta in compendio, onde diminuisce la fatiga ne' calcoli molto lunghi. Veggiamo in che consiste questo compendio.

11. Considerando $2m$ cifre in (P), ed ottenutane la prima a del quoziente (B) se ne avrà il residuo bA, bS, zA, bA cui bisognerebbe unirsi la

linea verticale ($2m+1$) esima onde averne la seconda b. A tal punto io rifletto che ciascuna linea orizzontale di (P) è quella che ci dà una cifra in (B): anzi che ogni cifra di (B) si ottiene dividendo il primo termine di ciascuna linea orizzontale di (P), per quello di (A). Inoltre rifletto che l'msima cifra decimale di (B) si ottiene dall'ultimo termine zA della linea verticale di (P), che ne marca la $2m$ sima cifra: Quindi le linee verticali da questa in poi non influiscono sul valore delle m cifre decimali del quoziente (B), e perciò si possono omettere e trascurare.

12. Ma come continuare l'operazione venendo ad emettersi le cifre da queste linee rappresentate? Avuta la cifra a del quoziente, il residuo, che se ne avrà, sarà minore del divisore, e perciò come dividerlo per esso senza l'aggiunta della cifra immediata? Ecco come si viene a riparare a questo disordine, come si viene cioè a compensare nel divisore l'omissione successiva delle linee del dividendo (P)

13. La cifra b del quoziente (B) si ottiene dalla divisione del primo residuo pel divisore,

ed essa non si ripete immediatamente che dalla seconda linea orizzontale di (*P*): venendo a non aggiungersi a questo residuo la linea verticale della cifra immediata, si viene a trascurare in questa linea orizzontale il termine bZ, cioè il prodotto dell'ultima cifra Z del divisore (A) per la b di (B), che si cerca. Quindi oltre di aggiungere la cifra, cui questo termine appartiene, e che come abbiam veduto non influisce sul valore di b, noi possiamo omettere quest' ultima cifra Z; omissione che annullerebbe ancora tutti i primi termini delle linee verticali susseguenti, i quali non influiscono sulle m cifre decimali della nostra approssimazione.

Similmente la cifra c non si ottiene che dal secondo residuo, cui si dovrebbe aggiungere ancora la seconda linea verticale delle omesse: l'omissione di queste due linee però produce nella terza orizzontale, da cui il valore di c si ottiene, la mancanza de' termini cS, cZ; mancanza che si verrebbe similmente ad avere se oltre dell' ultima Z si venisse ancora a trascurare in (A) la penultima S.

Così continuando a ſopprimere le cifre di (*A*) a miſura che ſi dovrebbe aggiungere una linea verticale al corriſpondente reſiduo, ſi arriverà in fine del calcolo per le domandate *m* decimali in (*B*), alla totale ſoppreſſione delle linee verticali di (*P*), le quali ſi ſono ſeparate a deſtra fin dal principio dell' operazione.

14. Quindi facilmente conchiudeſi la regola del compendio, cioè „ ſi conſiderino nel „ dividendo tante decimali di più che nel di„ viſore, quante ſe ne vogliono nel quoziente; „ ſi ſeparino poi in eſſo dividendo tante cifre a „ deſtra quante ſono quelle del diviſore: ſi operi „ giuſta la regola ordinaria ſino al reſiduo, cui „ biſognerebbe aggiungere la prima delle cifre „ ſeparate, onde continuare l'operazione: ſi ſe„ guiti a dividere per queſto reſiduo, ſopprimen„ do però l' ultima cifra del diviſore: così per „ ogni nuovo reſiduo ſi ſopprima una nuova „ cifra di eſſo diviſore; ed arrivato a ſopprimerle „ tutte ſi ſeparino nel quoziente a deſtra tante „ cifre quante ſe ne ſono domandate "

15. Queſta regola però và indiſpenſabilmente ſoggetta a delle modificazioni, e ciò per le ra-

gioni ſteſſe per cui abbiam dovuto modificarne, quelle della moltiplica. La confuſione delle cifre numeriche fa che la prima linea omeſſa ha ſempre parte in un certo numero delle ſue ultime cifre: quindi le ultime decimali del quoziente non rifulterebbero eſatte, poichè ineſatte ſarebbero le cifre da cui ſi ripetono: quindi fa duopo trattenerne alcune di più, cioè ſeparare a deſtra del dividendo non quanto ſono quelle del diviſore, m'alcune di meno. Queſto minor numero di cifre che biſogna ſeperare nel dividendo è chiaro che dee corriſpondere a quelle di più che determinammo per la moltiplica. Noi ci crediamo in dritto di diſpenſarci a ripetere quanto vi ſi diſſe, e laſciamo ad altri una sì facile applicazione.

PROB. 3.

Uno mi dice: la metà de' miei ſcudi col loro terzo e quarto gli ſupera di uno. Quanti ſcudi ho?

16. Chiamato x il numero cercato di ſcudi ſi avrà dalla condizione propoſta l'equazione $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 1$, da cui ſe ne ottiene,

$x = 12$.

PROB. 4.

L' età a di ano è mpla *di quello di ſuo figlio; tra quanti anni ſarà* npla?

17. Sia x il numero degli anni a paſſare, onde l' età del padre divenghi *npla* di quella del figlio, e ſarà in tal momento $a+x$ l'età di quello, ed $\frac{a}{m}+x$ quella di queſto; quindi avremo per condizione $a+x=n(\frac{a}{m}+x)$ ed $x=\frac{a(m-n)}{mn.1)}$

PROB. 5.

Dando 3 *ſoldi per uno a de' poveri, mi mancano* 9 *ſoldi: ma dandone* 2 *me ne avanzano* 2 *Quanti ſono i ſoldi ed i poveri.*

18. Se x è il numero de' poveri, ſarà $3x-9$, e $3x+2$ quello de' ſoldi nelle due diverſe diſtribuzioni, e però ſi avrà $3x-9=2x+2$, ed $x=11$; cioè 11 furono i poveri, e 24 i ſoldi a dividerſi loro.

PROBL. 6.

Uno avea 6 *lire quando tirò il ſalario di* 5 *meſi:* 2 *meſi dopo avea già ſpeſe* $\frac{3}{4}$ *del ſuo denaro, ma riſcoſſo il ſalario ſi trovò con* 99 *lire. Quanto avea il meſe?*

19. Quando chiamiamo x il ſalario cercato, avremo

mo $5x+6$ pel numero di lire che ſi trovò l'individuo in queſtione dopo aver riſcoſſo il ſalario de' 5 meſi, $\frac{3}{4}(5x+6)$ quello che ne ſpeſe, e però $\frac{1}{4}(5x+6)$ quello che gliene ſopravanzò; e $2x$ finalmente quello de' due meſi. Quindi avremo l'equazione $\frac{1}{4}(5x+6)+2x=99$: ed $x=30$ l.

PROB. 7.

Uno laſcia a' nipoti 120000 *lire, cioè* 12000 *lire a ciaſcun maſchio, e* 9000 *lire a ciaſcuna femmina. Se aveſſe laſciato* 9000 *a' maſchi, e* 12000 *alle femmine ſarebbero avanzate* 9000. *Quanti ſono gli uni, e le altre?*

20. Io dico x i maſchi, ed y le femmine; ſuppongo per ſemplicità $120000=a$, $12000=b$, $9000=c$; onde avrò dalle condizioni propoſte.... $bx+cy=a$, $by+cx=a-c$. Dalla prima ho $x=\frac{a-cy}{b}$ che ſoſtituito nella ſeconda mi dà $y=\frac{ab-ac-bc}{b^2-c^2}$ da cui con le opportune ſoſtituzioni ne ottengo $y=4$, e però $x=7$; cioè 7 furono i maſchi, e 4 le femmine.

PROB. 8.

C *Cacciatore promette a* B *una ſomma* b *per ogni ſcarica in pieno. Dopo un numero* n *di ſcariche o* C, B *nulla ſi debbono, o* C *deve a* B *una quantità* d, *o* B *la deve a* C. *Trovare in generale le ſcariche a vuoto.*

21. x eſſendo le ſcariche andate a vuoto ſaranno $n-x$ quelle in pieno, e però bx, $a(n-x)$ le ſomme che C, B ſi debbono ſcambievolmente per legge di loro convenzione. Quindi . . . .

$bx+d=a(n-x)$, ed $x=\frac{an+d}{a+b}$

PROB. 9.

Diviſo un numero in m *ed in* m + 1 *parti eguali, il prodotto delle une eguaglia quello delle altre. Qual è queſto numero?*

22. Il numero cercato chiamato x, ſarà $\frac{x}{m}$, $\frac{x}{m+1}$ ciaſcuna delle m, $m+1$ parti eguali, in cui vuol eſſo ſucceſſivamente dividerli. Quindi dovendo il prodotto di tutte le prime, e di tutte le ſeconde eſſerne per condizione l'iſteſſo, io avrò l'equazione $(\frac{x}{m})^m=(\frac{x}{m+1})^{m+1}$, le quale mi dà . . . .

$$x=\frac{(m+1)^{m+1}}{m^m}$$

PROB. 10

A raddoppia co' ſuoi i denari di B *e di* C, *quindi* B *raddoppia quelli di* A *e di* C, *e poi* C *raddoppia quelli di* A *e di* B: *cosicchè in fine ciaſcuno ha* 16 *lire. Quante ne aveano in principio?*

23. I numeri di x, y, z lire ſon quelli che ſuppongo aver avuto A, B, C, onde ſoddisfare alle condizioni propoſte: Queſti numeri è chiaro che dopo la prima condizione divengono $x-y-z, 2y, 2z$; dopo la ſeconda $2x-2y-2z, 2y-(x-y-z)-2z\ (=3y-x-z), 4z$; dopo la terza finalmente $4x-4y-4z, 6y-2x-2z, \ldots\ldots$ $4z-(2x-2y-2z)-(3y-x-z) = 7z-x-y$; numeri che dovendo per condizione eſſere tutti $= 16$, ci daranno le tre equazioni $x-y-z=4$, $3y-x-z=8$, $7z-x-y=16$. Trattando queſte equazioni giuſta alcuno de' noti metodi di eliminazione ſe ne otterrà $x=26, y=14, z=8$.

PROB. 11.

Con a *carte ſi fanno* b *monti di egual numero* c *di punti, e la prima carta di ciaſcun monte val* 10 *ſe è figura,* 11 *ſe è aſſo,* 12 *ſe è due ec., ma le altre carte del monte vagliono ciaſcuna un ſolo punto. Fatti i monti e reſe le carte* d *avanzate,*

ſe ne avanzano, ſi chiede quanti punti x *faccio-no le prime carte di tutti i monti.*

Dalle condizioni propoſte ſi rileva che bc è il numero contenuto di punti in tutti i monti; che $bc - x$ ne è quello degli ſteſſi punti meno quello contenuto nelle prime carte; e che $bc - x + b$ ne è quello delle carte impiegate nella formazione de' monti. Dalle condizioni medeſime abbiamo in $a - d$ una ſeconda eſpreſſione dello ſteſſo numero di carte impiegate ne' monti. Quindi l' equazione $bc - x + b = a - d$; quindi .. $x = d + b(c + 1) - a$.

PROB. 12.

I crediti di 7. *perſone ſommate a* 6 *a* 6 *ſono* 994, 1036; 840, 910, 896, 952, 882. *Qual credito ha ciaſcuno?*

25. Suppongo che r, s, t, u, x, y, z ſieno i crediti cercati, donde ne ho le ſette equazioni.

$$r + s + t + u + x + y = 994 = a$$
$$r + s + t + u + x + z = 1036 = b$$
$$r + s + t + u + y + x = 840. = c$$
$$r + s + t + x + y + z = 910 = d$$
$$r + s + u + x + y + z = 896 = e$$
$$r + t + u + x + y + z = 952 = f$$
$$s + t + u + x + y + z = 882 = h$$

Diverſi ſono i metodi che ſi poſſono adoprare, onde ricavare da eſſe il valore particolare di ciaſcuna incognita. Se viene a prenderſi la ſomma loro totale; quindi a dividerſi per 6 queſta ſomma, e finalmente a ſottrarſi da queſto quoziente ciaſcuna di eſſe, ſe ne otterranno i valori cercati.

O pure ſommate a 6 a 6 queſte equazioni, quindi ſoſtratte le ultime 6 ſomme ſucceſſivamente dalla prima e ſoſtituiti nella prima equazione i riſultati $s = r+h-f$, $t = r+h-e$, $u = r+h-d$, $x = r+h-c$, $y = r+h-b$, $z = r+h-a$, ſe ne avrà $r = \ldots\ldots \frac{a+b+c+d+e+f-sh}{6} = 203$; donde quelli delle altre incognite.

Mi baſta di avere indicato queſti due metodi particolari; e mi baſta di avvertire ſoltanto che vi ſono de' metodi generali, onde eliminare le incognite di un numero qualunque di equazioni tanto del primo che di qualunque grado. Nelle noſtre lezioni non ſi parla de' primi, e de' ſecondi ſi fa un cenno ſolamente per quello dell'equazioni del ſecondo grado a due incognite. Chi ne ſarà curioſo potrà per quelli riſcontrare le opere del Bezout, e vedere per queſti il num. 121. di queſto volume.

PROB. 13.

Quali ſono i numeri x, y *la cui ſomma è* a *e quella de' lor cubi è* b?

26. Se dalla prima delle due equazioni $x+y=a$, $x^3+y^3=b$ di condizione, prendiamo il valor di x e lo mettiamo nella ſeconda, noi ne avremo $y^2-ay=\frac{b-a^3}{3a}$: donde ne otterremo alla fine $y=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{4b-a^3}{12a}}$ e però $x=\frac{1}{2}a\mp\sqrt{\frac{ab-a^3}{12a}}$

PROB. 14.

Qual' è il numero r *le cui potenze* m, m+2 *preſe l'una* p *e l'altra* g *volte ſi eguagliano?*

27. Io veggo che chiamato x il numero cercato, l'unica equazione di condizione ſi è $px^m=gx^{m+2}$, quale diviſo per x^m ci porta al riſultato $x=\pm\sqrt{\frac{p}{g}}$

PROB. 15.

Son 20 *tra uomini e donne in una locanda, e gli uni e le altre ſpendono* 24 *lire, ma ogni uomo ſpende* 5 *lire più di ogni donna quanti ſono gli uni e le altre?*

28. Quando x marca il numero degli uomini, $20-x$ ne marcherà quello delle donne, . . . , . e $\frac{24}{x}$, $\frac{24}{20-x}$ le ſomme pagate da ciaſcuno individuo. Quindi dovendo la prima di queſte ſomme eſſer più grande della ſeconda di 1 lira ſi avrà l' equazione $\frac{24}{x}-1=\frac{24}{20-x}$. donde . . . $x^2-68x=-480$, e ſi $x=\frac{60}{8}$. L' analiſi è da ſe ſola incapace ad indicarci qual di queſti due riſultati riſolva l'equazione propoſta. La condizione enunciata di non dover eſſere che 20 tra uomini e donne è quella che ne ſuppliſce il difetto col farci eſcludere il riſultato 60 come ad eſſa contrario.

PROB. 16.

Dimoſtrare i teoremi de' numeri (I. 10; 2; 8; 38, III; 44; IV, V; 55; 58; 305.)

(I. 10; 2.)

29 Una potenza m di 10 diminuita di 1 è ſempre un multiplo di 9.

Oſſervo che $10^m=(9+1)^m$, e quindi per la formula Newtoniana . . . . . .

$$10^m = 9^m + m9^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} 9^{m-2} \ldots + 1$$

donde $\frac{10^m - 1}{9} = 9^{m-1} + m9^{m-2} + \frac{m(m-3)}{9} 9^{m-3}$ + ec.

ma ſiccome io veggo che tutti i coefficienti del ſecondo membro non ſono che la ſomma.... (l. 146. 337.) di $m-1$, $m-2$, $m-3$, $m-4$, ec. termini della ſerie de' numeri figurati, e però de' numeri interi ogni volta che ve lo farà m; così $\frac{10^m - 1}{9} = E$.

(l. 10. 3)

30. Le potenze pari o impari di 10, quelle diminuite, e queſte accreſciute di 1 ſon ſempre un multiplo di 11.

L' eſſere $10^m = (11-1)^m$ ci dà, giuſta il teorema medeſimo di Newton, ...;

$$10^m = 11^m - m11^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} 11^{m-2} - \ldots \pm 1$$

ſecondo che m è pari o impari; e quindi

$$\frac{10^m \mp 1}{11} = 11^{m-1} - m\,11^{m-2} + \frac{m\,m-1}{2}\,11^{m-3} \text{ ec.} = E$$

(l. §8. III.)

31. Varie ſono le formole, e varj teoremi compreſi nel numero enunciato. Io parlerò ſol tanto di quelli, i quali mi ſembra che meritano qualche attenzione. Io incomincio dunque a parlare ſul modo di eſprimere in generale i numeri primi.

Ecco che riflitto che ſe ſi eccettui il 2, tutti i numeri primi ſon tutti numeri impari, e che però ciaſcuna delle formole . . . . .

(a).. $2m \pm$; (b).. $4m \pm 1$, (c).. $6m \pm 1$; $6m \pm 3$;

(d).. $8m \pm 1$, $8m \pm 3$, $8m \pm 5$; ec.

è egualmente propria a rappreſentarli. Riflettero ancora che dalle (a), (b) ſi hanno i numeri primi confuſi con tutti gli altri impari; che la ſeconda delle (c) rappreſenta tutti quegli impari

multipli di 3, e perciò non abbracciando nella sua espressione che il solo primo 3, ne avviene, che tutti i primi sono compresi nell'altra $6m \pm 1$; e che finalmente le (*d*); ec. non solamente danno i numeri primi confusi con tutti gli altri impari come le (*a*), (*b*), ma che dovranno ancora ripetersi da più di una formula: quindi concludo che la formula $6m \pm 1$ è quella che fra tutte le (*a*), (*b*), (*c*), (*d*), ec. esclude il maggior numero degli impari, e comprende, eccetto il 2 ed il 3, tutti i primi, ed è perciò quella che dee preferirsi, onde rappresentare in un modo generale tutti i numeri primi. Non credo fuori proposito l'avvertire che non ha luogo la proposizione contraria, cioè che, tutti i numeri dati dalla formula $6m \pm 1$ son tutti numeri primi.

(l. 38. III; 7.)

32. Marcando sempre con E un numero intero, noi abbiamo da' semplici principj della divisione $\frac{a}{3} = E \pm \frac{1}{3}$, e però $a = 3E \pm 1$, . . .

$a = 9E^2 \pm 6E + 1$, $2a^2 + 1 = 18E^2 \pm 12E + 3$, ed infine

$\frac{2a+1}{3} = 6E \pm 4E^2 + 1$, quando a non è un multiplo di 3. Quindi essendo in questo caso . .

$\frac{2a+1}{3} = E$, ne avviene che $2a+1$ sarà sempre un multiplo di 3, quando non ve lo è a; Essendo però a un multiplo di 3, e perciò $\frac{a}{3} = E$, giammai ve lo sarà $2a+1$, poichè.

$\frac{2a+1}{3} = 6E \pm \frac{1}{3}$

(l. 38. III; 9.)

33. Dalla formula citata del binomio noi abbiamo $(a+b)^p = a^p \pm pa^{p-1}b \pm \frac{p(p-1)}{2}a^{p-2}b^2 + \ldots$

$\frac{p(p-1)(p-2)}{2.3}a^{p-3}b^3 \pm \ldots b^p$. Osservo in questo sviluppo e veggo che $(a+b)^p - a^p - b^p = pa^{p-1}b \pm \ldots$

$\frac{p\,p-1}{2}a^{p-2}b^{2}+\ldots$, e che i coefficienti del

ſuo ſecondo membro ſon ſempre de' numeri intieri quando p è un intero; veggo inoltre che non eſſendo p un numero primo, e potendo eſſere perciò multiplo di alcuno de' fattori del denominatore, può influire a rendere intieri tali coefficienti; ma che eſſendo primo non può avervi influenza, e però dovrà eſſere in queſto caſo $\frac{p-1}{2}=E$, $\frac{(p-1)(p-2)}{2\ 3}=E$, ec. quindi in queſto caſo, in cui p è un numero primo, farà ſempre $\frac{a+b)^{p}-a^{p}-b^{p}}{p}=E$, cioè $(a+b)^{p}-a^{p}-b^{p}$ è ſempre un multiplo di p.

(l. 38. III. 10. 11. 12.)

Dimoſtrato il teorema precedente riesce facile dimoſtrare che $c^{p}-c$ è un multiplo di p quando p è un numero primo. In effetto abbiamo mercè il citato teorema nella ſuppoſizione di p nu-

mero primo, e marcando con E de' numeri interi qualunque

$$2^p \simeq (1+1)^p \simeq Ep+2$$

$$3^p \simeq (2+1)^p \simeq Ep+2^p+1$$

$$4^p \simeq (3+1)^p \simeq Ep+3^p+1$$

$$5^p \simeq (4+1)^p \simeq Ep+4^p+1$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$c^p \simeq (c-1+1)^p \simeq Ep+(c-1)^p+1$$

Quindi mettendo il primo valore nel secondo; poi il secondo nel terzo; poi il terzo nel quarto; e così successivamente; si avrà in generale

$c^p \simeq Ep+c$, epperò $\dfrac{c^p-c}{p} \simeq E$.

Essendo $\dfrac{c^p-c}{p} \simeq E$ ne avviene che c o $c^{p-1}-1$ dee necessariamente essere un multiplo di p. Quindi non essendo c un multiplo di p, ve lo

sarà sempre $c^{p-1} - 1$.

Non essendo c, d de' multipli di p quando esso è un numero primo, si avranno l' equazioni $\frac{c^{p-1} - 1}{p} = E$, $\frac{d^{p-1} - 1}{p} = E$, e perciò $\frac{c^{p-1} - d^{p-1}}{p} = E$.

Quindi $c^{p-1} - d^{p-1}$ è sempre un multiplo di p un quando p è numero primo, e c, d sono primi con esso. Quindi resta dimostrato questo teorema che l' Eulero annunciò senza dimostrazione, per non esserne come egli ci avverte in possesso, nelle memorie dell' Accademia delle scienze Petropolitane (*an.* 1732. 1733. *p.* 101, *ediz. di Bologna*).

(l. 38. III; 13. 14.)

Supposti a, b, ec. de' numeri interi conosciuti, ed il polinomio $ax^m \pm bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots z$ multiplo di d quando $x = f = f' = $ ec.; dico che ve lo sarà ancora quando $x = f \pm md = f' \pm m'd$, ec. supponendo m, m', ec. de' numeri interi qualunque; dico inoltre che i valori indipendenti

di x. e capaci a rendere queſto polinomio multiplo di d ſono tutti compreſi tra $-\frac{1}{2}d$, $+\frac{1}{2}d$

Se metto ſucceſſivamente f, f', ec. nel polinomio propoſto, ne avrò per condizione. . . .

$$\frac{af^n + bf^{n-1} + cf^{n-2} + \ldots z}{d} = E$$

$$\frac{af'^n + bf'^{n-1} + cf'^{n-2} + \ldots z}{d} = E$$

ec. ec

Se vi metto ſucceſſivamente $f \pm md$, $f' \pm m'd$, ec, ne avrò ordinando alle potenze di f, f', ec. . . .

$$af^n + bf^{n-1} + cf^{n-2} + \ldots z + amndf^{n-1} +$$

$$\left(\frac{an(n-1)}{2} m^2 d^2 \pm b(n-1)md\right) f^{n-2} + \text{ec.}$$

ec.

$$af'^n + bf'^{n-1} + cf'^{n-2} + \ldots z \pm am'ndf'^{n-1} +$$

$$\left(\frac{an'n-1)}{2} m'^2 d'^2 \pm b'(n-1)m'd\right) f'^{n-2} + \text{ec.}$$

ec. ec.

Ovvero

$$d(E \pm amnf^{n-1} + (\frac{an(n-1)}{2}m^2 d \pm b(n-1)f^{n-2} + \text{ec})$$

$$d(E \pm am'nf^{n-1} + (\frac{an(n-1)}{2}m'^2 d \pm b(n-1)m')f^{n-2} + \text{ec})$$

ec. ec.

Quantità in tutti i casi multiple di d

Dimostrata la prima, passo alla dimostrazione della seconda proposizione. A tale oggetto io suppongo $x(=f) > \pm \frac{1}{2}d = \pm \frac{1}{2}d+i$, e ne ho $x = f \pm md = \pm \frac{1}{2}d+i \pm md$. Quindi osservo che m è indeterminata, e perciò suscettibile di quel valore che ci farà più opportuno. Quindi determino m sotto la condizione onde risulti $f \pm md < \pm \frac{1}{2}d$, e ciò per avere tutti i valori di x tanto maggiori che minori di $\pm \frac{1}{2}d$. Quindi faccio $f \pm md = \pm \frac{1}{2}d - i$, e ne ho l'equazione

$\pm \frac{1}{2}d + i \pm md = \pm \frac{1}{2}d - i'$, cioè ne ho $m = -\frac{i+i'}{d}$. Offervando queſto valore di m, mi avveggo che quantunque i, i' ſono introdotte come indeterminate, frattanto per uno ſteſſo valore di x e di d, non poſſono ſubire anch' eſſe che un ſolo valore, e perciò non poſſono darne che un ſolo per m. In effetto dalla prima ſuppoſizione abbiamo $i = f \mp \frac{1}{2} d$, abbiamo cioè che i per lo ſteſſo valore di x, non ha che un valore ſolamente. Inoltre eſſendo i'' il valore più picciolo di i' che rende $\frac{i+i'}{d}$ un numero intero, tutti gli altri ſuoi valori che ve lo potrebbero rendere egualmente non ſarebbero che $i'' + Ed$, i quali ſi oppongono alla condizione della ſeconda ipoteſi, da cui i' ſi ha, ſempre $< \pm \frac{1}{2}d$.

$10^m = 9^m + m9^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} 9^{m-2} \ldots + 1$

donde $\frac{10^m - 1}{9} = 9^{m-1} + m9^{m-2} + \frac{m(m-3)}{9} 9^{m-3}$ + ec.

ma ſiccome io veggo che tutti i coefficienti del ſecondo membro non ſono che la ſomma.... (l. 145. 337.) di $m-1$, $m-2$, $m-3$, $m-4$, ec. termini della ſerie de' numeri figurati, e però de' numeri interi ogni volta che ve lo farà m; così $\frac{10^m - 1}{9} = E$.

(l. 10. 3)

30. Le potenze pari o impari di 10, quelle diminuite, e queſte accreſciute di 1 ſon ſempre un multiplo di 11.

L' eſſere $10^m = (11-1)^m$ ci dà, giuſta il teorema medeſimo di Newton, ...;

$10^m = 11^m - m11^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} 11^{m-2} - \ldots \pm 1$

secondo che m è pari o impari; e quindi

$$\frac{10^m \mp 1}{11} = 11^{m-1} - m11^{m-2} + \frac{m(m-1)}{2} 11^{m-3} \text{ ec.} = E$$

(l. 38. III.)

31. Varie sono le formole, e varj i teoremi compresi nel numero enunciato. Io parlerò soltanto di quelli, i quali mi sembra che meritano qualche attenzione. Io incomincio dunque a parlare sul modo di esprimere in generale i numeri primi.

Ecco che rifletto che se si eccettui il 2, tutti i numeri primi son tutti numeri impari, e che però ciascuna delle formole . . . . .

(a).. $2m \pm$; (b).. $4m \pm 1$, (c).. $6m \pm 1$; $6m \pm 3$;

(d).. $8m \pm 1$, $8m \pm 3$, $8m \pm 5$; ec.

è egualmente propria a rappresentarli. Riflettero ancora che dalle (a), (b) si hanno i numeri primi confusi con tutti gli altri impari; che la seconda delle (c) rappresenta tutti quegli impari

multipli di 3, e perciò non abbracciando nella sua espressione che il solo primo 3, ne avviene, che tutti i primi sono compresi nell'altra $6m \pm 1$; e che finalmente le (d); ec. non solamente danno i numeri primi confusi con tutti gli altri impari come le (a), (b), ma che dovranno ancora ripetersi da più di una formula: quindi concludo che la formula $6m \pm 1$ è quella che fra tutte le (a), (b), (c), (d), ec. esclude il maggior numero degli impari, e comprende, eccetto il 2 ed il 3, tutti i primi, ed è perciò quella che dee preferirsi, onde rappresentare in un modo generale tutti i numeri primi. Non credo fuori proposito l' avvertire che non ha luogo la proposizione contraria, cioè che, tutti i numeri dati dalla formula $6m \pm 1$ son tutti numeri primi.

(l. 38. III; 7.)

32. Marcando sempre con E un numero intero, noi abbiamo da' semplici principj della divisione $\frac{a}{3} = E \pm \frac{1}{3}$, e però $a = 3E \pm 1$, . . .

$a = 9E^2 \pm 6E + 1$, $2a^2 + 1 = 18E^2 \pm 12E + 3$, ed infine

$\frac{2a+1}{3} = 6E^2 \pm 4E + 1$, quando a non è un multiplo di 3. Quindi essendo in questo caso . . $\frac{2a+1}{3} = E$, ne avviene che $2a+1$ sarà sempre un multiplo di 3, quando non ve lo è a. Essendo però a un multiplo di 3, e perciò $\frac{a}{3} = E$, giammai ve lo sarà $2a+1$, poichè.

$$\frac{2a+1}{3} = 6E \pm \frac{1}{3}$$

(l. 38. III; 9.)

33. Dalla formula citata del binomio noi abbiamo $(a+b)^p = a^p \mp pa^{p-1}b \pm \frac{p(p-1)}{2}a^{p-2}b^2 + \ldots \frac{p(p-1)(p-2)}{2.3}a^{p-3}b^3 \mp \ldots b^p$. Osservo in questo sviluppo e veggo che $(a \pm b)^p - a^p - b^p = pa^{p-1}b \pm \ldots$

$\frac{p\,p-1}{2}a^{p-2}b^{2}+\ldots$, e che i coefficienti del suo secondo membro son sempre de' numeri intieri quando p è un intero; veggo inoltre che non essendo p un numero primo, e potendo essere perciò multiplo di alcuno de' fattori del denominatore, può influire a rendere intieri tali coefficienti; ma che essendo primo non può avervi influenza, e però dovrà essere in questo caso $\frac{p-1}{2}=E$, $\frac{(p-1)(p-2)}{2\ 3}=E$, ec. quindi in questo caso, in cui p è un numero primo, sarà sempre $\frac{a+b)^p-a^p-b^p}{p}=E$, cioè $(a+b)^p-a^p-b^p$ è sempre un multiplo di p.

(l. 38. III. 10. 11. 12.)

Dimostrato il teorema precedente riesce facile dimostrare che c^p-c è un multiplo di p quando p è un numero primo. In effetto abbiamo mercè il citato teorema nella supposizione di p nu-

mero primo, e marcando con E de' numeri interi qualunque

$$2^p \simeq (1+1)^p \simeq Ep+2$$

$$3^p \simeq (2+1)^p \simeq Ep+2^p+1$$

$$4^p \simeq (3+1)^p \simeq Ep+3^p+1$$

$$5^p \simeq (4+1)^p \simeq Ep+4^p+1$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$c^p \simeq (c-1+1)^p \simeq Ep+(c-1)^p+1$$

Quindi mettendo il primo valore nel secondo; poi il secondo nel terzo; poi il terzo nel quarto; e così successivamente; si avrà in generale

$c^p \simeq Ep+c$, epperò $\dfrac{c^p-c}{p} \simeq E$.

Essendo $\dfrac{c^p-c}{p} \simeq E$ ne avviene che c o $c^{p-1}-1$ dee necessariamente essere un multiplo di p. Quindi non essendo c un multiplo di p, ve lo

farà sempre $c^{p-1} \dashv 1$.

Non essendo c, d de' multipli di p quando esso è un numero primo, si avranno l' equazioni $\frac{c^{p-1} \dashv 1}{p} \rightleftharpoons E$, $\frac{d^{p-1} \dashv 1}{p} \rightleftharpoons E$, e perciò $\frac{c^{p-1} - d^{p-1}}{p} \rightleftharpoons E$.

Quindi $c^{p-1} - d^{p-1}$ è sempre un multiplo di p un quando p è numero primo, e c, d sono primi con esso. Quindi resta dimostrato questo teorema che l' Eulero annunciò senza dimostrazione, per non esserne come egli ci avverte in possesso, nelle memorie dell' Accademia delle scienze Petropolitane (*an.* 1732-1733. *p.* 101, *ediz. di Bologna*).

(l. 38. III; 13. 14.)

Supposti a, b, ec. de' numeri interi conosciuti, ed il polinomio $ax^m \pm bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots z$ multiplo di d quando $x \rightleftharpoons f \rightleftharpoons f' \rightleftharpoons$ ec.; dico che ve lo sarà ancora quando $x \rightleftharpoons f \pm md \rightleftharpoons f' \pm m'd$, ec. supponendo m, m', ec. de' numeri interi qualunque; dico inoltre che i valori indipeudenti

di x. e capaci a rendere queſto polinomio multiplo di d ſono tutti compreſi tra $-\frac{1}{2}d$, $+\frac{1}{2}d$

Se metto ſucceſſivamente f, f', ec. nel polinomio propoſto, ne avrò per condizione. . . .

$$\frac{af^n + bf^{n-1} + cf^{n-2} + \ldots z}{d} = E$$

$$\frac{af'^n + bf'^{n-1} + cf'^{n-2} + \ldots z}{d} = E$$

ec. ec

Se vi metto ſucceſſivamente $f \pm md$, $f' \pm m'd$, ec, ne avrò ordinando alle potenze di f, f', ec. . . .

$$af^n + bf^{n-1} + cf^{n-2} \ldots + z + amndf^{n-1} +$$

$$\left(\frac{an(n-1)}{2} m^2 d^2 \pm b(n-1)md\right) f^{n-2} + \text{ec.}$$

ec.

$$af'^n + bf'^{n-1} + cf'^{n-2} + \ldots z \pm am'ndf'^{n-1} +$$

$$\left(\frac{an'n-1)}{2} m'^2 d'^2 \pm b'(n-1)m'd\right) f'^{n-2} + \text{ec.}$$

ec. ec.

Ovvero

$$d(E \pm amnf^{n-1} + (\frac{an(n-1)}{2}m^2 d \pm b'(n-1)f^{n-2} \text{ ec})$$

$$d(E \pm am'nf^{n-1} + (\frac{an(n-1)}{2}m'^2 d \pm b'(n-1)m')f^{n-2} \text{ ec})$$

ec.

ec.

Quantità in tutti i casi multiple di d

Dimostrata la prima, passo alla dimostrazione della seconda proposizione. A tale oggetto io suppongo $x(=f) > \pm \frac{1}{2}d = \pm \frac{1}{2}d+i$, e ne ho $x = f \pm md = \pm \frac{1}{2}d+i \pm md$. Quindi osservo che m è indeterminata, e perciò suscettibile di quel valore che ci farà più opportuno. Quindi determino m sotto la condizione onde risulti $f \pm md < \pm \frac{1}{2}d$, e ciò per avere tutti i valori di x tanto maggiori che minori di $\pm \frac{1}{2}d$. Quindi faccio $f \pm md = \pm \frac{1}{2}d - i$, e ne ho l'equazione

$\pm \frac{1}{2}d + i \pm md = \pm \frac{1}{2}d - i'$, cioè ne ho $m = -\frac{i+i'}{d}$. Offervando queſto valore di m, mi avveggo che quantunque i, i' ſono introdotte come indeterminate, frattanto per uno ſteſſo valore di x e di d, non poſſono ſubire anch' eſſe che un ſolo valore, e perciò non poſſono darne che un ſolo per m. In effetto dalla prima ſuppoſizione abbiamo $i = f \mp \frac{1}{2}d$, abbiamo cioè che i per lo ſteſſo valore di x, non ha che un valore ſolamente. Inoltre eſſendo i'' il valore più picciolo di i' che rende $\frac{i+i'}{d}$ un numero intero, tutti gli altri ſuoi valori che ve lo potrebbero rendere egualmente non ſarebbero che $i'' + Ed$, i quali ſi oppongono alla condizione della ſeconda ipoteſi, da cui i' ſi ha, ſempre $< \pm \frac{1}{2}d$.

$$10^m = 9^m + m9^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} 9^{m-2} \ldots + 1$$

donde $\frac{10^m - 1}{9} = 9^{m-1} + m9^{m-2} + \frac{m(m-3)}{9} 9^{m-3}$ + ec.

ma ſiccome io veggo che tutti i coefficienti del ſecondo membro non ſono che la ſomma.... (l. 146. 337.) di $m-1$, $m-2$, $m-3$, $m-4$, ec. termini della ſerie de' numeri figurati, e però de' numeri intieri ogni volta che ve lo farà m; così $\frac{10^m - 1}{9} = E$.

(l. 10. 3)

30. Le potenze pari o impari di 10, quelle diminuite, e queſte accreſciute di 1 ſon ſempre un multiplo di 11.

L' eſſere $10^m = (11-1)^m$ ci dà, giuſta il teorema medeſimo di Newton, ...;

$$10^m = 11^m - m11^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} 11^{m-2} - \ldots \pm 1$$

secondo che m è pari o impari; e quindi

$$\frac{10^m \mp 1}{11} = 11^{m-1} - m11^{m-2} + \frac{m(m-1)}{2} 11^{m-3} \text{ ec.} = E$$

(l. 38. III.)

31. Varie sono le formole, e varj i teoremi compresi nel numero enunciato. Io parlerò soltanto di quelli, i quali mi sembra che meritano qualche attenzione. Io incomincio dunque a parlare sul modo di esprimere in generale i numeri primi.

Ecco che riflitto che se si eccettui il 2, tutti i numeri primi son tutti numeri impari, e che però ciascuna delle formole . . . . .

(a).. $2m \pm$; (b).. $4m \pm 1$, (c).. $6m \pm 1$; $6m \pm 3$;

(d).. $8m \pm 1$, $8m \pm 3$, $8m \pm 5$; ec.

è egualmente propria a rappresentarli. Riflettero ancora che dalle (a), (b) si hanno i numeri primi confusi con tutti gli altri impari; che la seconda delle (c) rappresenta tutti quegli impari

multipli di 3, e perciò non abbracciando nella sua espressione che il solo primo 3, ne avviene, che tutti i primi sono compresi nell'altra $6m \pm 1$; e che finalmente le (*d*); ec. non solamente danno i numeri primi confusi con tutti gli altri impari come le (*a*), (*b*), ma che dovranno ancora ripetersi da più di una formula: quindi concludo che la formula $6m \pm 1$ è quella che fra tutte le (*a*), (*b*), (*c*), (*d*), ec. esclude il maggior numero degli impari, e comprende, eccetto il 2 ed il 3, tutti i primi, ed è perciò quella che dee prescegliersi, onde rappresentare in un modo generale tutti i numeri primi. Non credo fuori proposito l' avvertire che non ha luogo la proposizione contraria, cioè che, tutti i numeri dati dalla formula $6m \pm 1$ son tutti numeri primi.

(l. 38. III; 7.)

32. Marcando sempre con E un numero intero, noi abbiamo da' semplici principj della divisione $\frac{a}{3} = E \pm \frac{1}{3}$, e però $a = 3E \pm 1$, . . .

$a^2 = 9E^2 \pm 6E + 1$, $2a^2 + 1 = 18E^2 \pm 12E + 3$, ed infine

$\frac{2a+1}{3} = 6E \pm 4E^2 + 1$, quando a non è un multiplo di 3. Quindi essendo in questo caso . . $\frac{2a+1}{3} = E$, ne avviene che $2a+1$ sarà sempre un multiplo di 3, quando non ve lo è a; Essendo però a un multiplo di 3, e perciò $\frac{a}{3} = E$, giammai ve lo sarà $2a+1$, poichè.

$$\frac{2a+1}{3} = 6E \pm \frac{1}{3}$$

(l. 38. III; 9.)

33. Dalla formula citata del binomio noi abbiamo $(a+b)^p = a^p \pm pa^{p-1}b \pm \frac{p(p-1)}{2}a^{p-2}b^2 + \ldots \pm \frac{p(p-1)(p-2)}{2.3}a^{p-3}b^3 \pm \ldots . b^p$. Osservo in questo sviluppo e veggo che $(a+b)^p - a^p - b^p = pa^{p-1}b \pm \ldots$

$\frac{p\,p-1}{2}a^{p-2}b^{2} + \ldots$, e che i coefficienti del suo secondo membro son sempre de' numeri intieri quando p è un intero; veggo inoltre che non essendo p un numero primo, e potendo essere perciò multiplo di alcuno de' fattori del denominatore, può influire a rendere intieri tali coefficienti; ma che essendo primo non può avervi influenza, e però dovrà essere in questo caso $\frac{p-1}{2} = E$, $\frac{(p-1)(p-2)}{2\ 3} = E$, ec. quindi in questo caso, in cui p è un numero primo, farà sempre $\frac{a+b)^p - a^p - b^p}{p} = E$, cioè $(a+b)^p - a^p - b^p$ è sempre un multiplo di p.

(l. 38. III. 10. 11. 12.)

Dimostrato il teorema precedente riesce facile dimostrare che $c^p - c$ è un multiplo di p quando p è un numero primo. In effetto abbiamo mercè il citato teorema nella supposizione di p nu-

mero primo, e marcando con E de' numeri interi qualunque

$$2^p = (1+1)^p = Ep+2$$

$$3^p = (2+1)^p = Ep+2^p+1$$

$$4^p = (3+1)^p = Ep+3^p+1$$

$$5^p = (4+1)^p = Ep+4^p+1$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$c^p = (c-1+1)^p = Ep+(c-1)^p+1$$

Quindi mettendo il primo valore nel secondo; poi il secondo nel terzo; poi il terzo nel quarto; e così successivamente; si avrà in generale

$c^p = Ep+c$, epperò $\dfrac{c^p-c}{p} = E$.

Essendo $\dfrac{c^p-c}{p} = E$ ne avviene che c o $c^{p-1}-1$ dee necessariamente essere un multiplo di p. Quindi non essendo c un multiplo di p, ve lo

farà sempre $c^{p-1} - 1$.

Non essendo c, d de' multipli di p quando esso è un numero primo, si avranno l' equazioni $\frac{c^{p-1} - 1}{p} = E$, $\frac{d^{p-1} - 1}{p} = E$, e perciò $\frac{c^{p-1} - d^{p-1}}{p} = E$.

Quindi $c^{p-1} - d^{p-1}$ è sempre un multiplo di p un quando p è numero primo, e c, d sono primi con esso. Quindi resta dimostrato questo teorema che l' Eulero annunciò senza dimostrazione, per non esserne come egli ci avverte in possesso, nelle memorie dell' Accademia delle scienze Petropolitane (*an.* 1732-1733. *p.* 101, *ediz. di Bologna*).

(l. 38. III; 13. 14.)

Supposti a, b, ec. de' numeri interi conosciuti, ed il polinomio $ax^m \pm bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots z$ multiplo di d quando $x = f = f' = $ ec.; dico che ve lo sarà ancora quando $x = f \pm md = f' \pm m'd$, ec. supponendo m, m', ec. de' numeri interi qualunque; dico inoltre che i valori indipendenti

di x. e capaci a rendere questo polinomio multiplo di d sono tutti compresi tra $-\frac{1}{2}d$, $+\frac{1}{2}d$

Se metto successivamente f, f', ec. nel polinomio proposto, ne avrò per condizione. . . .

$$\frac{af^n + bf^{n-1} + cf^{n-2} + \ldots z}{d} = E$$

$$\frac{af'^n + bf'^{n-1} + cf'^{n-2} + \ldots z}{d} = E$$

ec. ec

Se vi metto successivamente $f \pm md$, $f' \pm m'd$, ec, ne avrò ordinando alle potenze di f, f', ec. . . .

$$af^n + bf^{n-1} + cf^{n-2} \pm \ldots z + amndf^{n-1} +$$

$$\left(\frac{an(n-1)}{2} m^2 d^2 \pm b(n-1)md\right) f^{n-2} + \text{ec.}$$

ec.

$$af'^n + bf'^{n-1} + cf'^{n-2} \pm \ldots z \pm am'ndf'^{n-1} +$$

$$\left(\frac{an'n-1)}{2} m'^2 d'^2 \pm b'(n-1)m'd\right) f'^{n-2} + \text{ec.}$$

ec. ec.

Ovvero

$$d(E \mp amnf^{n-1} + (\frac{an(n-1)}{2}m^2 d \pm b(n-1)f^{n-2} \pm \text{ec})$$

$$d(E \pm am'nf^{n-1} + (\frac{an(n-1)}{2}m'^2 d \pm b(n-1)m')f'^{n-2} + \text{ec})$$

ec. ec.

Quantità in tutti i casi multiple di d

Dimostrata la prima, passo alla dimostrazione della seconda proposizione. A tale oggetto io suppongo $x(\leqq f) > \pm \frac{1}{2}d \leqq \pm \frac{1}{2}d + i$, e ne ho $x \leqq f \pm md \leqq \pm \frac{1}{2}d + i \pm md$. Quindi osservo che m è indeterminata, e perciò suscettibile di quel valore che ci sarà più opportuno. Quindi determino m sotto la condizione onde risulti $f \pm md < \pm \frac{1}{2}d$, e ciò per avere tutti i valori di x tanto maggiori che minori di $\pm \frac{1}{2}d$. Quindi faccio $f \pm md \leqq \pm \frac{1}{2}d - i'$, e ne ho l'equazione

$\pm \frac{1}{2}d + i \pm md = \pm \frac{1}{2}d - i'$, cioè ne ho $m = -\frac{i+i'}{d}$. Offervando queſto valore di m, mi avveggo che quantunque i, i' ſono introdotte come indeterminate, frattanto per uno ſteſſo valore di x e di d, non poſſono ſubire anch' eſſe che un ſolo valore, e perciò non poſſono darne che un ſolo per m. In effetto dalla prima ſuppoſizione abbiamo $i = f \mp \frac{1}{2}d$, abbiamo cioè che i per lo ſteſſo valore di x, non ha che un valore ſolamente. Inoltre eſſendo i'' il valore più picciolo di i' che rende $\frac{i+i'}{d}$ un numero intero, tutti gli altri ſuoi valori che ve lo potrebbero rendere egualmente non ſarebbero che $i'' + Ed$, i quali ſi oppongono alla condizione della ſeconda ipoteſi, da cui i' ſi ha, ſempre $< \pm \frac{1}{2}d$.

3°. Quindi il valore f di $x > \pm \frac{1}{2}d$ ne ha sempre un altro $< \pm \frac{1}{2}d$ che adempie ancora alla condizione propoſta. Un altro valore $f' > \pm \frac{1}{2}d$ di x, darà per n un nuovo valore, quanto ſia $f' \pm nd < \pm \frac{d}{2}$, e perciò darà per x un nuovo valore ſoddisfacente alla condizione medeſima; e così di ſeguito. Quando adunque niun valore di $x < \pm \frac{d}{2}$ renderà multiplo di d il polinomio propoſto, è queſto l'argomento, onde conchiudere l'impoſſibilità di trovarne alcuno che ve lo rende; e quanti ſono i valori di $x < \pm \frac{d}{2}$, che ve lo rendono, altretante ſaranno le ſerie di quelli $> \pm \frac{d}{2}$ che vi ſoddisfanno ancora.

38. Se io chiamo p qualunque de' valori di $x < \pm \frac{d}{2}$ corriſpondenti all a condizione di adem-

pierſi, ſarà $p = f \pm md$, e però $f = p \mp md$, ciòè i valori di $x > \pm \frac{d}{2}$ ſi poſſono riguardare come dipendenti di quelli $< \pm \frac{d}{2}$. Quindi tutti quei indipendenti fra loro ſon tutti $< \pm \frac{d}{2}$, ſon tutti compreſi cioè tra i limiti $-\frac{d}{2}$, e $+\frac{d}{2}$.

(l. 44. IV.)

39 Dalla natura della divi ſione abbiamo che il reſiduo è ſempre minore del diviſore. Quindi il reſiduo corriſpondente al caſo di D diviſo per d non può che eſſere eguale ad alcuno de' numeri 1, 2, 3, 4, ... $d - 1$. Bilanciando i gradi di probabilità io veggo adunque che quello reſiduo ha $d - 1$ caſi a favore ed uno contrario, cioè che la diviſione di D per d ha nel riuſcire eſatta un caſo a favore e $d - 1$ per contra. Quindi ſi può ſcommettere con eguale vantaggio $d - 1$ contra 1, che tale diviſione non riſulterà ſenza reſto.

(l. 44. V.)

40. Se dal dividere ſucceſſivamente per d, d' uno ſteſſo numero n io ne ho i quozienti q, q', cioè ſe io ho $\frac{n}{d} = q$, $\frac{n}{d'} = q'$ ne avrò ancora

$q \pm q' = \frac{n}{d} \pm \frac{n}{d'}$; e quindi $\frac{n}{dd'} = \frac{q \pm q'}{d' \pm d}$, ed

$$n = \frac{dd'(q \pm q')}{d' \pm d}$$

(l. 55. II. III.)

41 Noi ſappiamo che la formola generale, onde eſprimere un numero qualunque, ſi è ... $a10^{m} + b10^{m-1} + c10^{m-2} + \ldots t10 + u$, e veggiamo perciò che ogni numero terminante in zero, o in 5 ſi può generalmente eſprimere con ....

$$a10^{m} \pm b10^{m-1} \pm c10^{m-2} + \ldots t10$$

$$a10^{m} \pm b.0^{m-1} \pm c10^{m-2} + \ldots t10 + 5$$

Oſſervo la prima di queſte eſpreſſioni, e veggo di eſſere un multiplo di 2, di 5, e di 10; ne

ſſervo la ſeconda, e la veggo un multiplo di 5: quindi conchiudo che tutti i numeri, i quali terminano in zero ſono diviſibili per 2, 5, 10; e tutti quegl' altri, i quali finiſcono in 5, ſono diviſibili ſoltanto per 5.

(l. 55. IV.)

42. Dalla medeſima eſpreſſione generale de numeri, noi abbiamo la prima parte non ſolo un multiplo di 2^n, ma ancora di 5^n, 10^n. Quindi ſe velo ſarà la ſeconda parte $e10^{n-1} + f10^{m-2} + \ldots u$, tutto il numero propoſto ſarà multiplo di 2^n, 5^n, 10^n: Ma queſta ſeconda parte non forma che l' n ſue ultime cifre; quindi ogni numero la ſomma delle cui ultime cifre è diviſibile per 2^n, 5^n, 10^n, ſarà un multiplo ancora di 2^n, 5^n, 10^n.

(l. 55. VI

44 Se io multiplico per 11 l' eſpreſſione generale de' numeri, ne avrò . . . . . .

$$11\,(a10^{m} + b10^{m-1} + c10^{m-2} + d10^{m-3} + e10^{m-4} + \ldots$$

$$\ldots + u10^{3} + z10^{2} + w10 \pm v) = \ldots$$

$$a10^{m+1} + 10^{m}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} + 10^{m-1}\begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} + 10^{m-2}\begin{pmatrix} d \\ c \end{pmatrix} + \ldots$$

$$+10^{m-3}\begin{pmatrix} e \\ d \end{pmatrix} + 10^{m-4}\begin{pmatrix} f \\ e \end{pmatrix} + 10^{m-5}\begin{pmatrix} \\ f \end{pmatrix} + \ldots$$

$$\ldots 10^{4}\begin{pmatrix} u \\ \end{pmatrix} + 10^{3}\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} + 10^{2}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} + 10\begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix} + v$$

Offervo in queſto prodotto che la ſomma de' termini alternativi ne è l'iſteſſa, è uguale cioè ad $a + b + c + d \pm \ldots v$. Quindi ne deduco che ogni numero la ſomma delle cui cifre alternative è uguale, ſarà certamente diviſibile per 11.

(l. 58)

45 Il ſoggetto ſu di cui ſi verſa l'articolo enunciato appartenendo alle frazioni continue è quello che mi preſenta l'occaſione onde dettagliare ſebbene in riſtretto la di lor teoria. L'autore delle lezioni nel breviſſimo ſaggio che dà

ſu di queſta teoria non parlo che della ſola evoluzione di un rotto ordinario in continuo, e della riduzione di queſto a quello. Noi allorchè verremo a ſviluppare la dottrina ſulla ſoluzione numerica dell' equazioni, e ſugl' indeterminati del ſecondo grado, avremo indiſpenſabile l' uſo di alcune proprietà ſcoperte dagli Analiſti ſu queſta ſpecie di frazioni. Queſto è l' argomento per cui ſon principalmente venuto ad impegnarmi in queſto dettaglio. Quindi ſecondo il piano che io mi ho propoſto ſeguire in queſta raccolta verrò ad applicare le dottrine generali al caſo particolare propoſto nell' articolo della queſtione, e che a ſuo luogo non mancherò di enunciare. Quindi per niente dipendere da quel poco che l' autore delle lezioni ne dice e per darne un ſaggio indipendente a ſe ſteſſo, incomincio dalla definizione col dire.

46. Frazione continua ſi dice quella frazione il cui denominatore è compoſto di un intero e di un rotto tale che ha ancor eſſo un denominatore compoſto di un intero, e di un rotto, che egualmente ha un denominatore compoſto di un rotto, e così di ſeguito. Ecco l' eſempio di una frazione continua.

$$l + \cfrac{a}{l' + \cfrac{b}{l'' + \cfrac{c}{l''' \pm \cdots \cfrac{t}{l^{(m)} + \cfrac{u}{X}}}}}$$

$$l + \cfrac{1}{l' + \cfrac{1}{l'' \pm \cfrac{1}{l''' + \cdots \cfrac{1}{l^{(m)} + \cfrac{1}{X}}}}}$$

frazione continua in cui le quantità componenti non ſono che de' numeri interi poſitivi o negativi. Quantunque la ſeconda frazione non ſia che un caſo particolare della prima, fratanto noi andremo a conſiderar queſta e non quella; poi-

chè le frazioni della ſua forma ſon quelle che hanno nell' analiſi un uſo grandiſſimo; poichè quelle della prima non lo ſono quaſi di alcuno; poichè il metodo di trattare quelle della prima e le conſeguenze che ſene hanno non ſono che le ſteſſe di quelle che riſultano dalla seconda; e peichè finalmente le operazioni e le formule per queſte debbono trovarſi più ſemplici e meno inviluppate che in quelle.

Stabilita adunque la forma di queſte frazioni la di cui prima idea ſe ne dee a M. Broncker, noi andiamo ad eſaminarne quelle principali proprietà, che ſappiamo eſſere ſtate per la prima volta conoſciute dal celebre Ugenio. Noi andiamo a vederne in primo luogo il modo della loro generazione.

47. Sia X una quantità che non può eſprimerſi in numeri interi, ed l l'intero ad eſſa proſſimamente inferiore: onde avremo $X-l<1$, $\frac{1}{X-l}>1$.. $=X'$, e però $X=l+\frac{1}{X'}$. Sia ſimilmente l' l'intero proſſimamente inferiore ad X', e ſarà...

$X' - l' < 1, \frac{1}{X' - l'} > 1 = X''$, e però $X' = l' + \frac{1}{X''}$.

Sia nel modo ſteſſo l'' l'intero proſſimamente inferiore ad X'', onde averne $X'' - l'' < 1, \frac{1}{X'' - l''} > 1 = X'''$, e però $X'' = l'' + \frac{1}{X'''}$. Così continuando a notare con $l''' \ldots l^{(n-1)}, l^{(n)}$ gl'interi proſſimamente inferiori ad $X''', \ldots X^{(n-1)}, X^{(n)}$, noi avremo la ſeguente

TAV. I.

$X - l < 1$	$\frac{1}{X - l} > 1 = X'$
$X' - l' < 1$	$\frac{1}{X' - l'} > 1 = X''$
$X'' - l'' < 1$	$\frac{1}{X'' - l''} > 1 = X'''$
. . . . .	. . . . .
$X^{(n-1)} - l^{(n-1)} < 1$	$\frac{1}{X^{(n-1)} - l^{(n-1)}} > 1 = X^{(n)}$

$$X = l + \frac{1}{X'} \qquad l < X$$

$$X' = l' + \frac{1}{X''} \qquad l' < X'$$

$$X'' = l'' + \frac{1}{X'''} \qquad l'' < X''$$

. . . . . .

$$X^{(n-1)} = l^{(n-1)} + \frac{1}{X^{(n)}} \qquad l^{(n-1)} < X^{(n-1)}$$

48. Se nella prima formula della terza linea verticale di queſta tavola mettiamo ſucceſſivamente i valori che ſi hanno in quelle ad eſſa ſuſſeguenti, ne avremo . . . . . .

$$X = l + \frac{1}{X'} = l + \frac{1}{l' + \frac{1}{X''}} = l + \frac{1}{l' + \frac{1}{l'' + \frac{1}{X'''}}} = \ldots$$

$$\ldots l + \cfrac{1}{l' + \cfrac{1}{l'' + \cfrac{1}{l''' + \ldots \cfrac{1}{l^{(n-1)} + \cfrac{1}{X^{(n)}}}}}}$$

ne avremo cioè l'evoluzione di X in frazione continua, in cui gli $l^{(n)}$ ſono de' numeri tutti poſitivi, quando ſi riguardano come gl'interi proſſimamente inferiori alle $X^{(n)}$: locchè è ſtato da noi indicato col ſegno $<$, e di che ſe ne può ripetere la ragione dalla prima linea verticale della tavola ſteſſa.

49. Se ſucceſſivamente omettiamo ne' valori di X il termine riſpettivo $\frac{1}{X^{(n)}}$ ne avremo le approſſimazioni conſecutive

$$X = l = l + \cfrac{1}{l'} = l + \cfrac{1}{l' + \cfrac{1}{l''}} = l + \cfrac{1}{l' + \cfrac{1}{l'' + \cfrac{1}{l'''}}} \ldots$$

$$\ldots l + \cfrac{1}{l' + \cfrac{1}{l'' + \cfrac{1}{l''' + \cdot}}}$$

$$\cdot$$

$$\cdot + \cfrac{1}{l^{(n-1)}}$$

Ovvero riducendo in frazione comune

$$X = l$$

$$X = \frac{ll' + 1}{l'}$$

$$X = \frac{(ll' + 1)l'' + l}{l'l'' + 1}$$

$$X = \frac{((ll' + 1)l'' + l)l''' + ll' + 1}{(l'l'' + 1)l''' + l'}$$

$$X = \frac{(((ll' + 1)l'' + l)l''' + ll' + 1)l^{IV} + (ll' + 1)l'' + l}{((l'l'' + 1)l''' + l')l^{IV} + l'l'' + 1}$$

$X =$ ec.

50. Quindi notando per maggior ſemplicità $M, M' \ldots M^{(n)}$ i numeratori ed $N, N', \ldots N^{(n)}$ i denominatori di queſte frazioni; ed oſſervando nel tempo ſteſſo la legge ſotto cui progrediſcono, cioè che ogni numeratore o denominatore è ſempre uguale all' ultimo de' numeratori o denominatori che lo precedono moltiplicato nel corriſpondente degli $l^{(n)}$, e del numeratore o denominatore penultimo, ne avremo $X = \frac{M^{(n)}}{N^{(n)}}$, e gli $M^{(n)} N^{(n)}$ dalle

TAV. II.

$M = l$

$M' = ll' + 1$

$M'' = (ll' + 1)l'' + l$

$M''' = ((ll' + 1)l'' + l)l''' + ll' + 1$

$M^{IV} = (((ll' + 1)l'' + l)l''' + ll' + 1)l^{IV} + (ll' + 1)l'' + l$

$M^{V} =$ ec.

$N = 1$

$N' = l$

$N'' = ll'' + 1$

$N''' = (ll'' + 1)l''' + l$

$N^{IV} = ((ll'' + 1)l''' + l)l^{IV} + ll'' + 1$

$N^{V} =$ ec.

Ovvero

Tav. II.

$M = l'$

$M' = Ml' + 1$

$M'' = M'l'' + M$

$M''' = M''l''' + M'$

$M^{IV} = M'''l^{IV} + M''$

. . . . . .

$M^{(n)} = M^{(n-1)}l^{(n)} + M^{(n-2)}$

Tav. III.

$N = 1$

$N' = Nl'$

$N'' = N'l'' + N$

$N''' = N''l''' + N'$

$N^{IV} = N'''l^{IV} + N''$

. . . . . .

$N^{(n)} = N^{(n-1)}l^{(n)} + N^{(n-2)}$

53. Se vorremo esprimere finalmente in frazioni communi le diverse espressioni del valore di X senza l'omissione indicata, avremo

$$X = \frac{lX'+1}{X'} = \frac{(ll'+1)X''+l}{l'X''+1}$$

$$= \frac{(l'(ll'+1)+l)X'''+ll'+1}{(l'l''+1)X'''+1} = \text{&c.}$$

ovvero adottando le ſuppoſizioni compreſe nell'eſpoſte due tavole, avremo

$$X = \frac{MX'+1}{NX'} = \frac{M'X''+M}{N'X''+N}$$

$$= \frac{M''X'''+M'}{N''X'''+N'} = \ldots \frac{M^{(n-1)}X^{(n)}+M^{(n-2)}}{N^{(n-1)}X^{(n)}+N^{(n-2)}}$$

52. Dietro a quanto veniamo di eſporre non rieſce difficile rilevare le proprietà principali che godono le frazioni $\frac{M}{N}, \frac{M'}{N'}, \frac{M''}{N''}$ ec. Ricaviamo adunque queſte proprietà: diamo così compimento a queſta teoria delle frazioni continue: e veniamo quindi allo ſviluppo del numero enunciato che forma il ſoggetto radicale di eſſa.

Le tavole I. II. ci convincono facilmente I. che la ſerie de' valori dell'$M^{(n)}$, e dell'$N^{(n)}$ è ſempre creſcente, epperò che le frazioni eſprimenti il valore di X ſono eſpreſſe in termini ſempreppiù grandi come ſi aumenta il numero n degli apici, cioè come più ſene ſpinge più avanti l'approſſimazione.

II. Che $M'N - MN' = 1$, $M''N' - M'N'' = -1$,
$M'N'' - M'N''' = 1$, $M''''N'''' - M'''N''''' = -1$
ec.

cioè in generale che

$$M^{(n)} N^{(n-1)} - M^{(n-1)} N^{(n)} = \pm 1$$

ſecondo che n è impari o pari.

Quindi avviene che ſuppoſto che i termini in qualunque di queſte frazioni abbiano un fattor comune k, cioè ſuppoſto

$M^{(n)} = KM_1^{(n)}$, $N^{(n)} = KN_1^{(n)}$

ſi avrà $M_1^{(n)} N_1^{(n-1)} - M_1^{(n-1)} N_1^{(n)} = \pm \frac{1}{k}$

cioè ſi avrà un'equazione aſſurda in quanto il primo membro è intero, e fratto il ſecondo, ſi avrà cioè un argomento che queſti termini ſon ſempre primi tra loro...

III. Che prendendo in generale le tre frazioni contigue

$$\frac{M^{(n-2)}}{N^{(n-2)}}, \frac{M^{(n-1)}}{N^{(n-1)}}, \frac{M^{(n)}}{N^{(n)}}$$

esprimenti le diverse approssimazioni del valore di X; formandone le due equazioni consecutive (II.)

$$M^{(n-1)} N^{(n-2)} - M^{(n-2)} N^{(n-1)} = \mp 1$$

$$M^{(n)} N^{(n-1)} - M^{(n-1)} N^{(n)} = \pm 1$$

dividendoli quindi per

$$N^{(n-1)} N^{(n-2)}, \quad N^{(n)} N^{(n-1)}$$

ci daranno

$$\frac{M^{(n-1)}}{N^{(n-1)}} - \frac{M^{(n-2)}}{N^{(n-2)}} = \mp \frac{1}{N^{(n-1)} N^{(n-2)}}$$

$$\frac{M^{(n)}}{N^{(n)}} - \frac{M^{(n-1)}}{N^{(n-1)}} = \pm \frac{1}{N^{(n)} N^{(n-1)}}$$

le quali per essere (I.)

$$N^{(n)} N^{(n-1)} > N^{(n-1)} N^{(n-1)}$$

ci insegnano che la differenza di due frazioni contigue và sempreppiù impicciolendosi.

IV. Che le due approssimazioni contigue del valore di

$$X = \frac{M^{(n-2)} X^{(n-1)} + M^{(n-3)}}{N^{(n-2)} X^{(n-1)} + N^{(n-3)}}$$

$$= \frac{M^{(n-1)} X^{(n)} + N^{(n-2)}}{N^{(n-1)} X^{(n)} + N^{(n-2)}}$$

ci danno

$$X = \frac{M^{(n-2)}}{N^{(n-2)}} \mp \frac{1}{\left(N^{(n-2)} X^{(n-1)} + N^{(n-3)}\right) N^{(n-2)}}$$

$$= \frac{M^{(n-1)}}{N^{(n-1)}} \pm \frac{1}{\left(N^{(n-1)} X^{(n)} + N^{(n-2)}\right) N^{(n-1)}}$$

e ci insegnano perciò che la prima essendo

$> \frac{M^{(n-2)}}{N^{(n-2)}}$, è sempre la seconda $< \frac{M^{(n-1)}}{N^{(n-1)}}$

Inoltre per essere (*lav.* I.)

$$X^{(n-1)} > l^{(n-1)} X^{(n)} > l^{(n)}$$

e perciò

$$N^{(n-2)} X^{(n-1)} + N^{(n-3)} > N^{(n-2)} l^{(n-1)} + N^{(n-3)} \left(= N^{(n-1)}\right)$$

$$N^{(n-1)} X^{(n)} + N^{(n-2)} > N^{(n-1)} l^{(n)} + N^{(n-3)} \left(= N^{(n)}\right)$$

epperò

$$\frac{1}{N^{(n-2)}\left(N^{(n-2)} X^{(n-1)} + N^{(n-3)}\right)} < \frac{1}{N^{(n-2)} N^{(n-1)}}$$

$$\frac{1}{N^{(n-1)}\left(N^{(n-1)} X^{(n)} + N^{(n-2)}\right)} < \frac{1}{N^{(n-1)} N^{(n)}}$$

$$< \frac{1}{N^{(n-2)} N^{(n-1)}} \quad \text{(III.)}$$

c'insegnano che non solo essendo la prima $> \frac{M^{\prime\prime\ldots n-2}}{N^{\prime\prime\ldots n-2}}$, è la seconda $< \frac{M^{\prime\prime\ldots n-1}}{N^{\prime\prime\ldots n-1}}$ ma che ancora il valore di X è sempre ristretto fra i limiti $\frac{M^{\prime\prime\ldots n-2}}{N^{\prime\prime\ldots n-2}}, \frac{M^{\prime\prime\ldots n-1}}{N^{\prime\prime\ldots n-2}}$ Inoltre per essere (tav.I.)

$$X^{\prime\prime\ldots n-1} < l^{\prime\prime\ldots n-1} + 1,\ X^{\prime\prime\ldots n} < l^{\prime\prime\ldots n} + 1$$

e perciò per essere

$$N^{\prime\prime\ldots n-2}\left(N^{\prime\prime\ldots n-2} X^{\prime\prime\ldots n-1} + N^{\prime\prime\ldots n-3}\right)$$

$$< N^{\prime\prime\ldots n-2}\left(N^{\prime\prime\ldots n-2}(l^{\prime\prime\ldots n-1} + 1) + N^{\prime\prime\ldots n-3}\right)$$

$$\left(= N^{\prime\prime\ldots n-2}\left(N^{\prime\prime\ldots n-1} + N^{\prime\prime\ldots n-2}\right)\right)$$

$$N^{\prime\prime\ldots n-1}\left(N^{\prime\prime\ldots n-1} X^{\prime\prime\ldots n} + N^{\prime\prime\ldots n-2}\right)$$

$$< N^{\prime\prime\ldots n-1}\left(N^{\prime\prime\ldots n-1}(l^{\prime\prime\ldots n} + 1) + N^{\prime\prime\ldots n-2}\right)$$

$$\left(= N^{\prime\prime\ldots n-1}(N^{\prime\prime\ldots n} + N^{\prime\prime\ldots n-1})\right)$$

$$\frac{1}{N''_{..n-2}\left(N''_{..n-3}\,X''_{..n-1}+N''_{..n-3}\right)}$$

$$>\frac{1}{N''_{..n-2}\left(N''_{..n-1}+N''_{..n-2}\right)}$$

$$\frac{1}{N''_{..n-1}\left(N''_{..n-1}\,X''_{..n}+N''_{..n-2}\right)}$$

$$>\frac{1}{N''_{..n-1}\left(N''_{..n}+N''_{..n-1}\right)}.$$

continua ad insegnarci che la differenza tra il valore di X e ciascuna delle frazioni

$$\frac{M''_{..n-2}}{N''_{..n-2}},\quad \frac{M''_{..n-1}}{N''_{..n-1}}$$ non solamente è

$$<\frac{1}{N''_{..n-2}\,N''_{..n-1}}<\frac{1}{N''_{..n-1}\,N''_{..n}}$$

ma che ancora è

$$> \frac{1}{N^{(n-2)}(N^{(n-1)} + N^{(n-2)})} \text{ ; e}$$

$$> \frac{1}{N^{(n-1)}(N^{(n)} + N^{(n-1)})}$$

cioè che tali differenze trovansi sempre fra i limiti

$$\frac{1}{N^{(n-2)}(N^{(n-1)} + N^{(n-2)})} \text{ ed } \frac{1}{N^{(n-1)}\,N^{(n-2)}}\text{ ; fra}$$

$$\frac{1}{N^{(n-1)}(N^{(n)} + N^{(n-1)})} \text{ ed } \frac{1}{N^{(n-1)}\,N^{(n)}}\text{ : limiti}$$

assai ristretti, e che ci mostrano perciò la picciolezza degli errori che si vanno a commettere, allorchè si prende per X ciascuna di esse frazioni; e limiti le di cui rispettive differenze essendo . . . . . .

$$\frac{1}{N^{(n-1)}(N^{(n-1)} + N^{(n-2)})} \text{ , } \frac{1}{N^{(n)}(N^{(n)} + N^{(n-1)})}$$

ci avvertono ancora che essi divengono sempre più stretti come si aumenta il numero n degli apici, e perciò sempre più piccioli risultano cotali errori. Quindi se si farà $n = 2 = 4 = 6 =$ ec.

la frazione $\frac{M^{(n-2)}}{N^{(n-2)}}$ è che rappresenta la serie in generale delle frazioni tutte $< X$, e la $\frac{M^{(n-1)}}{N^{(n-1)}}$ quella delle frazioni tutte $> X$, ma che l'una e l'altra si convergono verso il vero valore di X, e per cui si esprimono colla voce generica di frazioni convergenti.

V. La tav. I. in cui $X^{(n-1)} = I^{(n-1)} + \frac{1}{X^{(n)}}$

è quella che ci dà $I^{(n-1)} = \frac{X^{(n-1)} X^{(n)} - 1}{X^{(n)}}$

e quindi essendo $N^{(n-1)} = N^{(n-2)} I^{(n-1)} + N^{(n-3)}$ noi ne avremo . . . . . .

$$N^{(n-1)} = \frac{N^{(n-2)}(X^{(n-1)} X^{(n)} - 1) + X^{(n)} N^{(n-3)}}{X^{(n)}}.$$

donde l'espressione . . . . . .

$$M^{(n-1)} - N^{(n-1)} X = \mp \frac{1}{N^{(n-1)}(N^{(n-1)} X^{(n)} + N^{(n-2)})}$$

che si ottiene (IV. 6), diviene

$$M^{(n-1)} - N^{(n-1)} X = \mp \frac{1}{(N^{(n-2)} X^{(n-1)} + N^{(n-3)}) X^{(n)}}$$

, cioè

$$X^{(n)}(M^{(n-1)} \mp N^{(n-1)} X) = \mp \frac{1}{N^{(n-2)} X^{(n-1)} \pm N^{(n-3)}}$$

$= (IV.a) - M^{(n-2)} + N^{(n-2)} X$, e però per essere sempre $X^{(n)} > 1$, si avrà, facendo astrazione de' segni, $M^{(n-2)} \mp N^{(n-2)} X > M^{(n-1)} \mp N^{(n-1)} X$.

Siccome $M^{(n-2)} < M^{(n-1)}$, ed $N^{(n-2)} < N^{(n-1)}$

siccome tra $\frac{M^{(n-2)}}{N^{(n-2)}}$, ed $\frac{M^{(n-1)}}{N^{(n-1)}}$

non si può trovare una terza frazione $\frac{h}{k}$ tale che sia k tra $N^{(n-2)}$ ed $N^{(n-1)}$;

cioè che sia nel tempo stesso $k > N^{(n-2)}$ e $< N^{(n-1)}$, come vedremo; siccome finalmente essendo $N^{(n-2)} < N^{(n-1)}$ è ancora $M^{(n-2)} \ldots < M^{(n-1)}$, così ne avviene che se nell' espressione $M^{(n-1)} - N^{(n-1)} X$ si metterà a luogo di $M^{(n-1)}$, $N^{(n-1)}$ de' numeri più piccioli, allora essa ne diverrà maggiore in quantità. Quindi in generale io conchiudo che una quantità della forma $p - qX$, in cui a luogo di p, q vi si mettono de' valori minori, essa acquisterà un valore più grande quando $\frac{p}{q}$ è una delle frazioni convergenti verso il valore di X; proprietà che trova la sua applicazione nella seconda parte del problema 49.

53. Non resta onde compire questa teoria, che assegnar la ragione, per cui tra . . . $\frac{M^{(n-2)}}{N^{(n-2)}}$ ed $\frac{M^{(n-1)}}{N^{(n-1)}}$ non vi si può trovare una

terza frazione $\frac{h}{k}$, il di cui denominatore sia fra i di loro denominatori. In effetto io la veggo nel num. III.; poichè supponendo che $\frac{h}{k}$ fosse una delle frazioni convergenti intermedia fra le indicate, avremo $\frac{M^{(n-2)}}{N^{(n-2)}} - \frac{h}{k} = \pm \frac{1}{kN^{(n-2)}}$ ed . . . $\frac{h}{k} - \frac{M^{(n-1)}}{N^{(n-1)}} = \pm \frac{1}{kN^{(n-1)}}$; e però senza badare a' segni $\frac{1}{kN^{(n-2)}}$ ed $\frac{1}{kN^{(n-1)}} < \frac{1}{N^{(n-2)}N^{(n-1)}}$ cioè . . . . . $kN^{(n-2)}$ e $kN^{(n-1)} > N^{(n-2)}N^{(n-1)}$; cioè . . . $k > N^{(n-2)}$, e $> N^{(n-1)}$: locchè ci mostra

che la frazione $\frac{h}{k}$ ſuppoſta intermedia fra le indicate ha il ſuo denominatore maggiore di ambedue i denominatori di eſſe, cioè che il denominatore, è però il ſuo numeratore non può eſſere intermedio fra i denominatori e numeratori di eſſe. Ciò provandoci adunque la falſità dell' ipoteſi, ci convince, che ciaſcuna delle frazioni convergenti ſi avvicina tanto al vero valor di X, quanto non può eſſo eſprimerſi in termini più ſemplici.

54. Ecco che dopo il dettaglio delle principali proprietà ſulle frazioni continue, dettaglio che potrà eſſerci utile nel ſeguito, noi andiamo ad applicarne le idee generale, a quella loro ſpecie, che riſulta dall'evoluzione de' rotti communi, onde vedere come il ſaggio dato dall' Autore è compreſo in quello da cui veniamo; e trattare ancora il ſoggetto contenuto nel numero enunciato.

55. Sia $X = \frac{B}{A}$, in cui A, B ſono de' numeri interi e razionali; ed è chiaro che l'intero proſ-

ſimamente inferiore ad X, cioè l, non è in queſto caſo che il quoziente intero di B diviſo per A. Quindi ſe chiamo r il reſiduo di queſta diviſione, avrò $X - l = \frac{B}{A} - l = \frac{r}{A}$, e però $\frac{1}{X - l} = X' = \frac{A}{r}$. Similmente l'intero proſſimamente inferiore ad X', cioè l', non è che il quoziente intero di A diviſo per r, e quindi ſe chiamo come ſopra r' il reſiduo di queſta diviſione, avrò $X' - l' = \frac{A}{r} - l' = \frac{r'}{r}$ e però $X'' = \frac{r}{r'}$. Se nuovamente divido r per r' ne avrò l'', e quindi ſe chiamo r'' il reſiduo corriſpondente avrò $X'' - l'' = \frac{r}{r'} - l'' = \frac{r''}{r'}$ e però $X''' = \frac{r'}{r''}$; così continuando arriveremo a trovare . . . . . $X^{(n)} = \frac{r^{(n-2)}}{r^{(n-1)}}$. Quindi dalla diviſione di $r^{(n-2)}$ per $r^{(n-1)}$ ad averne $l^{(n)}$ e chiamando $r^{(n)}$ il reſiduo corriſpondente ad avere . . . . . .

$X^{(n)} - l = \frac{r^{(n-2)}}{r^{(n-1)}} - l = \frac{r^{(n)}}{r^{(n-1)}}$, ed $X^{(n+1)} = \frac{r^{(n-1)}}{r^{(n)}}$

L'evoluzione adunque del rotto comune $\frac{B}{A}$ in continuo dipende dalle divisioni indicate da $\frac{B}{A}$, $\frac{A}{r}$, $\frac{r}{r'}$, $\frac{r'}{r''}$, . . . $\frac{r^{(n-1)}}{r^{(n)}}$: ma come $B \geqslant A$, $A \geqslant r$, $r \geqslant r'$, ec. e però come le quantità B, A, r', r'', .. $r^{(n)}$ diminuiscono continuamente; così è chiaro che qualunque sia la legge di questa diminuzione, se nel corso dell' operazione non verrà ad incontrarsi esatta alcuna delle indicate divisioni, cioè se il rotto sarà irriducibile dovrà indispensabilmente trovarsi $r^{(n)} = 1$

56. Inoltre raccogliendo le parti per cui abbiamo passato nell' evoluzione di $\frac{B}{A}$ in rotto continuo, noi avremo la tavola

mſimi, $(m+1)$eſimi, $2m$ſimi, $(2m+1)$eſimi, ec. termini delle due ſerie, e quindi colle (l. 285. 297.) le ſomme parziali degli m termini di eſſe. Le prime formule ci danno

$$\begin{array}{llll} a+d(m-1) & \cdot\ \cdot\ \cdot & aq^{m-1} \\ a+dm & \cdot\ \cdot\ \cdot & aq^{m} \\ a+d(2m-1) & \cdot\ \cdot\ \cdot & aq^{2m-1} \\ a+2dm & \cdot\ \cdot\ \cdot & aq^{2m} \\ a+d(3m-1) & \cdot\ \cdot\ \cdot & aq^{3m-1} \\ \text{ec.} & & \text{ec.} \end{array}$$

pe' termini diſtanti m fra loro nelle due ſerie, e le ſeconde ci danno

$$S = \frac{m}{2}(2a+d(m-1)); \qquad S = \frac{a^{\frac{m}{m-1}}(q^{m}-1)}{a^{\frac{1}{m-1}}(q^{m-1})}$$

$$S' = \frac{m}{2}(2a+d(3m-1)); \qquad S' = \frac{a^{\frac{m}{m-1}}(q^{\frac{m(2m-1)}{m-1}}-q^{\frac{m^2}{m-1}})}{a^{\frac{1}{m-1}}(q^{\frac{2m-1}{m-1}}-q^{\frac{m}{m-1}})}$$

$S'' =$ ec. $\qquad S'' =$ ec.

ovvero

$$\frac{1}{N^{\prime\prime\ldots n-2}\left(N^{\prime\prime\ldots n-3}\,X^{\prime\prime\ldots n-1}+N^{\prime\prime\ldots n-3}\right)}$$

$$> \frac{1}{N^{\prime\prime\ldots n-2}\left(N^{\prime\prime\ldots n-1}+N^{\prime\prime\ldots n-2}\right)}$$

$$\frac{1}{N^{\prime\prime\ldots n-1}\left(N^{\prime\prime\ldots n-1}\,X^{\prime\prime\ldots n}+N^{\prime\prime\ldots n-2}\right)}$$

$$> \frac{1}{N^{\prime\prime\ldots n-1}\left(N^{\prime\prime\ldots n}+N^{\prime\prime\ldots n-1}\right)}.$$

continua ad insegnarci che la differenza tra il valore di X e ciascuna delle frazioni

$$\frac{M^{\prime\prime\ldots n-2}}{N^{\prime\prime\ldots n-2}},\quad \frac{M^{\prime\prime\ldots n-1}}{N^{\prime\prime\ldots n-1}}$$ non solamente è

$$< \frac{1}{N^{\prime\prime\ldots n-2}\,N^{\prime\prime\ldots n-1}} < \frac{1}{N^{\prime\prime\ldots n-1}\,N^{\prime\prime\ldots n}}$$

ma che ancora è

$$> \frac{1}{N^{(n-2)}(N^{(n-1)} + N^{(n-2)})} ; e$$

$$> \frac{1}{N^{(n-1)}(N^{(n)} + N^{(n-1)})}$$

cioè che tali differenze trovansi sempre fra i limiti

$$\frac{1}{N^{(n-2)}(N^{(n-1)} + N^{(n-2)})} \text{ ed } \frac{1}{N^{(n-1)} N^{(n-2)}}; \text{ fra}$$

$$\frac{1}{N^{(n-1)}(N^{(n)} + N^{(n-1)})} \text{ ed } \frac{1}{N^{(n-1)} N^{(n)}}: \text{ limiti}$$

assai ristretti, e che ci mostrano perciò la picciolezza degli errori che si vanno a commettere, allorchè si prende per X ciascuna di esse frazioni; e limiti le di cui rispettive differenze essendo . . . . . a

$$\frac{1}{N^{(n-1)}(N^{(n-1)} + N^{(n-2)})}, \quad \frac{1}{N^{(n)}(N^{(n)} + N^{(n-1)})}$$

ci avvertono ancora che essi divengono sempre più stretti come si aumenta il numero n degli apici, e perciò sempre più piccioli risultano cotali errori. Quindi se si farà $n = 2 = 4 = 6 =$ ec.

la frazione $\frac{M^{(n-2)}}{N^{(n-2)}}$ è che rappresenta la serie in generale delle frazioni tutte $< X$, e la $\frac{M^{(n-1)}}{N^{(n-1)}}$ quella delle frazioni tutte $> X$, ma che l'una e l'altra si convergono verso il vero valore di X, e per cui si esprimono colla voce generica di frazioni convergenti.

V. La tav. I. in cui $X^{(n-1)} = l^{(n-1)} + \frac{1}{X^{(n)}}$

è quella che ci dà $l^{(n-1)} = \frac{X^{(n-1)} X^{(n)} - 1}{X^{(n)}}$

e quindi essendo $N^{(n-1)} = N^{(n-2)} l^{(n-1)} + N^{(n-3)}$ noi ne avremo . . . . . .

$$N^{(n-1)} = \frac{N^{(n-2)}(X^{(n-1)} X^{(n)} - 1) + X^{(n)} N^{(n-3)}}{X^{(n)}}$$

donde l'espressione . . . . . .

$$M^{(n-1)} - N^{(n-1)} X = \mp \frac{1}{N^{(n-1)}(N^{(n-1)} X^{(n)} + N^{(n-2)})}$$

che ſi ottiene (IV. *b*), diviene

$$M^{(n-1)} - N^{(n-1)} X = \mp \frac{1}{(N^{(n-2)} X^{(n-1)} + N^{(n-3)}) X^{(n)}}$$

, cioè

$$X^{(n)}(M^{(n-1)} \mp N^{(n-1)} X) = \mp \frac{1}{N^{(n-2)} X^{(n-1)} \pm N^{(n-3)}}$$

$= (\text{IV}.a) - M^{(n-2)} + N^{(n-2)} X$, e però per eſſere ſempre $X^{(n)} > 1$, ſi avrà, facendo aſtrazione de' ſegni, $M^{(n-2)} \mp N^{(n-2)} X > M^{(n-1)} \mp N^{(n-1)} X$.

Siccome $M^{(n-2)} < M^{(n-1)}$, ed $N^{(n-2)} < N^{(n-1)}$

ſiccome tra $\frac{M^{(n-2)}}{N^{(n-2)}}$, ed $\frac{M^{(n-1)}}{N^{(n-1)}}$

non si può trovare una terza frazione $\frac{h}{k}$ tale che sia k tra $N^{(n-2)}$ ed $N^{(n-1)}$;

cioè che sia nel tempo stesso $k > N^{(n-2)}$ e $< N^{(n-1)}$, come vedremo; siccome finalmente essendo $N^{(n-2)} < N^{(n-1)}$ è ancora $M^{(n-2)} \ldots < M^{(n-1)}$, così ne avviene che se nell' espressione $M^{(n-1)} - N^{(n-1)} X$ si metterà a luogo di $M^{(n-1)}$, $N^{(n-1)}$ de' numeri più piccioli, allora essa ne diverrà maggiore in quantità. Quindi in generale io conchiudo che una quantità della forma $p - qX$, in cui a luogo di p, q vi si mettono de' valori minori, essa acquisterà un valore più grande quando $\frac{p}{q}$ è una delle frazioni convergenti verso il valore di X; proprietà che trova la sua applicazione nella seconda parte del problema 49.

53. Non resta onde compire questa teoria, che assegnar la ragione, per cui tra . . . $\frac{M^{(n-2)}}{N^{(n-2)}}$ ed $\frac{M^{(n-1)}}{N^{(n-1)}}$ non vi si può trovare una

terza frazione $\frac{\quad}{k}$, il di cui denominatore ſia fra i di loro denominatori. In effetto io la veggo nel num. III.; poichè ſupponendo che $\frac{h}{k}$ foſſe una delle frazioni convergenti intermedia fra le indicate, avremo $\frac{M^{(n-2)}}{N^{(n-2)}} - \frac{h}{k} = \pm \frac{1}{kN^{(n-2)}}$ ed . . . $\frac{h}{k} - \frac{M^{(n-1)}}{N^{(n-1)}} = \mp \frac{1}{kN^{(n-1)}}$; e però ſenza badare a' ſegni $\frac{1}{kN^{(n-2)}}$ ed $\frac{1}{kN^{(n-1)}} < . .$ $\frac{1}{N^{(n-2)}N^{(n-1)}}$ cioè . . . . . $kN^{(n-2)}$ e $kN^{(n-1)} > N^{(n-2)}N^{(n-1)}$; cioè . . . $k > N^{(n-2)}$, e $> N^{(n-1)}$: locchè ci moſtra

che la frazione $\frac{h}{k}$ ſuppoſta intermedia fra le indicate ha il ſuo denominatore maggiore di ambedue i denominatori di eſſe, cioè che il denominatore, è però il ſuo numeratore non può eſſere intermedio fra i denominatori e numeratori di eſſe. Ciò provandoci adunque la falſità dell' ipoteſi, ci convince, che ciaſcuna delle frazioni convergenti ſi avvicina tanto al vero valor di X, quanto non può eſſo eſprimerſi in termini più ſemplici.

54. Ecco che dopo il dettaglio delle principali proprietà ſulle frazioni continue, dettaglio che potrà eſſerci utile nel ſeguito, noi andiamo ad applicarne le idee generale, a quella loro ſpecie, che riſulta dall'evoluzione de' rotti communi, onde vedere come il ſaggio dato dall' Autore è compreſo in quello da cui veniamo; e trattare ancora il ſoggetto contenuto nel numero enunciato.

55. Sia $X = \frac{B}{A}$, in cui A, B ſono de' numeri interi e razionali; ed è chiaro che l'intero proſ-

ſimamente inferiore ad X, cioè l, non è in queſto caſo che il quoziente intero di B diviſo per A. Quindi ſe chiamo r il reſiduo di queſta diviſione, avrò $X - l = \frac{B}{A} - l = \frac{r}{A}$, e però $\frac{1}{X-l} = X' = \frac{A}{r}$. Similmente l'intero proſſimamente inferiore ad X', cioè l', non è che il quoziente intero di A diviſo per r, e quindi ſe chiamo come ſopra r' il reſiduo di queſta diviſione, avrò $X' - l' = \frac{A}{r} - l' = \frac{r'}{r}$ e però $X'' = \frac{r}{r'}$. Se nuovamente divido r per r' ne avrò l'', e quindi ſe chiamo r'' il reſiduo corriſpondente avrò $X'' - l'' = \frac{r}{r'} - l'' = \frac{r''}{r'}$ e però $X''' = \frac{r'}{r''}$; così continuando arriveremo a trovare . . . . . $X^{(n)} = \frac{r^{(n-2)}}{r^{(n-1)}}$. Quindi dalla diviſione di $r^{(n-2)}$ per $r^{(n-1)}$ ad averne $l^{(n)}$ e chiamando $r^{(n)}$ il reſiduo corriſpondente ad avere . . . . . .

$X^{(n)} - l = \frac{r^{(n-2)}}{r^{(n-1)}} - l = \frac{r^{(n)}}{r^{(n-1)}}$, ed $X^{(n+1)} = \frac{r^{(n-1)}}{r^{(n)}}$

L'evoluzione adunque del rotto comune $\frac{B}{A}$ in continuo dipende dalle divisioni indicate da $\frac{B}{A}$, $\frac{A}{r}$, $\frac{r}{r'}$, $\frac{r'}{r''}$, . . . $\frac{r^{(n-1)}}{r^{(n)}}$: ma come $B \geqslant A$, $A \geqslant r$, $r \geqslant r'$, ec. e però come le quantità B, A, r', r'', .. $r^{(n)}$ diminuiscono continuamente; così è chiaro che qualunque sia la legge di questa diminuzione, se nel corso dell' operazione non verrà ad incontrarsi esatta alcuna delle indicate divisioni, cioè se il rotto sarà irriducibile dovrà indispensabilmente trovarsi $r^{(n)} = 1$

56. Inoltre raccogliendo le parti per cui abbiamo passato nell'evoluzione di $\frac{B}{A}$ in rotto continuo, noi avremo la tavola

mſimi, $(m+1)$eſimi, $2m$ſimi, $(2m+1)$eſimi, ec. termini delle due ſerie, e quindi colle (l. 285. 297.) le ſomme parziali degli m termini di eſſe. Le prime formule ci danno

$a+d(m-1)$	. . .	aq^{m-1}
$a+dm$	. . .	aq^{m}
$a+d(2m-1)$	. . .	aq^{2m-1}
$a+2dm$	. . .	aq^{2m}
$a+d(3m-1)$	. . .	aq^{3m-1}
ec.		ec.

pe' termini diſtanti m fra loro nelle due ſerie, e le ſeconde ci danno

$$S = \frac{m}{2}(2a+d(m-1)) \; ; \qquad S = \frac{a^{\frac{m}{m-1}}(q^{m}-1)}{a^{\frac{1}{m-1}}(q-1)}$$

$$S' = \frac{m}{2}(2a+d(3m-1)) ; \qquad S' = \frac{a^{\frac{m}{m-1}}(q^{\frac{m(2m-1)}{m-1}}-q^{\frac{m^2}{m-1}})}{a^{\frac{1}{m-1}}(q^{\frac{2m-1}{m-1}}-q^{\frac{m}{m-1}})}$$

$S'' =$ ec. $\qquad S'' =$ ec.

per le loro corrispondenti somme parziali. Prendendo la differenza, o il quoziente di S, S', noi ne avremo $d = dm^2$ o $q = q^m$, e così la risposta che ci avevamo proposto a rilevare.

PROB. 17.

Un mobile fa miglia 9 *nel primo giorno*; 8 *nel secondo ec.: un altro ne fa nel primo giorno* 27, *e nel secondo* 18, *ec.: ambedue in progressione geometrica. Qual è il viaggio per tutta l' eternità?*

58. Le serie de' cammini de' due mobili proposti essendo decrescenti: una decrescenza per l' eternità, cioè infinita, riducendo il finito all' infinitesimo, oltre della cognizione enunciata de' primi termini delle due serie in questione e de' lor quozienti, cene porge ancor quella de' loro ultimi termini. Quindi con questi tre elementi, e col soccorso della formula (l. 299) si arriva allo sviluppo proposto. Quindi io dico facendo nella formula citata $S = \frac{uq - a}{q - 1}$, $a = 9$ $= 27$, $q = \frac{8}{9} = \frac{2}{3}$, ed $u = \frac{o}{m}$ sene avrà il risultato $s = 81$.

PROB. 18.

Due Corrieri con le celerità m ; n *partono nel punto ſteſſo l'uno da Firenze per Livorno, e l'altro da Livorno per Firenze, e la diſtanza tra queſti due luoghi è* a. *Ove ſi incontreranno?*

59. Se ſi conta x da Firenze ſino al punto di rincontro, dovrà contarſi $a-x$ da queſto punto a Livorno. Quindi i cammini che fecero nel tempo ſteſſo i due Corrieri furono x, $a-x$. Quindi abbiamo per condizione $x : a-x :: m : n$.

Quindi finalmente $x = \frac{am}{m+n}$

PROB. 19.

Un Orologio tra le 5 *e le* 6 *ha la lancetta de' minuti ſu quella delle ore: Che ora è?*

60. Suppongo che $m : 1$ ſia il rapporto delle celerità della lancetta de' minuti a quella dalla lancetta delle ore; e che x ſia il cammino, qual dovrà farſi della prima onde raggiungere la ſeconda; cammino che io ſuppongo contato dal principio di tutte le diviſioni. Dopo ciò io oſſervo che la lancetta delle ore caminerà $\frac{x}{m}$ nel

$$\frac{1}{N''_{..n-2}(N''_{..n-3}X''_{..n-1}+N''_{..n-3})}$$

$$> \frac{1}{N''_{..n-2}(N''_{..n-1}+N''_{..n-2})}$$

$$\frac{1}{N''_{..n-1}(N''_{..n-1}X''_{..n}+N''_{..n-2})}$$

$$> \frac{1}{N''_{..n-1}(N''_{..n}+N''_{..n-1})}.$$

continua ad insegnarci che la differenza tra il valore di X e ciascuna delle frazioni

$$\frac{M''_{..n-2}}{N''_{..n-2}}, \quad \frac{M''_{..n-1}}{N''_{..n-1}}$$ non solamente è

$$< \frac{1}{N''_{..n-2}N''_{..n-1}} < \frac{1}{N''_{..n-1}N''_{..n}}$$

ma che ancora è

$$> \frac{1}{N^{(n-2)}(N^{(n-1)} + N^{(n-2)})} \text{ , e}$$

$$> \frac{1}{N^{(n-1)}(N^{(n)} + N^{(n-1)})}$$

cioè che tali differenze trovansi sempre fra i limiti

$$\frac{1}{N^{(n-2)}(N^{(n-1)} + N^{(n-2)})} \text{ ed } \frac{1}{N^{(n-1)}\,N^{(n-2)}}\text{; fra}$$

$$\frac{1}{N^{(n-1)}(N^{(n)} + N^{(n-1)})} \text{ ed } \frac{1}{N^{(n-1)}\,N^{(n)}}\text{; limiti}$$

assai ristretti, e che ci mostrano perciò la picciolezza degli errori che si vanno a commettere, allorchè si prende per X ciascuna di esse frazioni; e limiti le di cui rispettive differenze essendo . . . . . .

$$\frac{1}{N^{(n-1)}(N^{(n-1)} + N^{(n-2)})} \text{ , } \frac{1}{N^{(n)}(N^{(n)} + N^{(n-1)})}$$

ci avvertono ancora che essi divengono sempre più stretti come si aumenta il numero n degli apici, e perciò sempre più piccioli risultano cotali errori. Quindi se si farà $n = 2 = 4 = 6 = $ ec.

la frazione $\frac{M^{(n-2)}}{N^{(n-2)}}$ è che rappresenta la serie in generale delle frazioni tutte $< X$, e la $\frac{M^{(n-1)}}{N^{(n-1)}}$ quella delle frazioni tutte $> X$, ma che l'una e l'altra si convergono verso il vero valore di X, e per cui si esprimono colla voce generica di frazioni convergenti.

V. La tav. I. in cui $X^{(n-1)} = I^{(n-1)} + \frac{1}{X^{(n)}}$ è quella che ci dà $I^{(n-1)} = \frac{X^{(n-1)} X^{(n)} - 1}{X^{(n)}}$

e quindi essendo $N^{(n-1)} = N^{(n-2)} I^{(n-1)} + N^{(n-3)}$ noi ne avremo . . . . . .

$$N^{(n-1)} = \frac{N^{(n-2)}(X^{(n-1)} X^{(n)} - 1) + X^{(n)} N^{(n-3)}}{X^{(n)}}$$

donde l'espressione . . . . . .

$$M^{(n-1)} - N^{(n-1)} X = \mp \frac{1}{N^{(n-1)}(N^{(n-1)} X^{(n)} + N^{(n-2)})}$$

che si ottiene (IV. *b*), diviene

$$M^{(n-1)} - N^{(n-1)} X = \mp \frac{1}{(N^{(n-2)} X^{(n-1)} + N^{(n-3)}) X^{(n)}}$$

, cioè

$$X^{(n)}(M^{(n-1)} \mp N^{(n-1)} X) = \mp \frac{1}{N^{(n-2)} X^{(n-1)} \pm N^{(n-3)}}$$

$= (IV.a) - M^{(n-2)} + N^{(n-2)} X$, e però per essere sempre $X^{(n)} > 1$, si avrà, facendo astrazione de' segni, $M^{(n-2)} \mp N^{(n-2)} X > M^{(n-1)} \mp N^{(n-1)} X$.

Siccome $M^{(n-2)} < M^{(n-1)}$, ed $N^{(n-2)} < N^{(n-1)}$

siccome tra $\frac{M^{(n-2)}}{N^{(n-2)}}$, ed $\frac{M^{(n-1)}}{N^{(n-1)}}$

non si può trovare una terza frazione $\frac{h}{k}$ tale che sia k tra $N^{(n-2)}$ ed $N^{(n-1)}$;

cioè che sia nel tempo stesso $k > N^{(n-2)}$ e $< N^{(n-1)}$, come vedremo; siccome finalmente essendo $N^{(n-2)} < N^{(n-1)}$ è ancora $M^{(n-2)} \ldots < M^{(n-1)}$, così ne avviene che se nell' espressione $M^{(n-1)} - N^{(n-1)} X$ si metterà a luogo di $M^{(n-1)}$, $N^{(n-1)}$ de' numeri più piccioli, allora essa ne diverrà maggiore in quantità. Quindi in generale io conchiudo che una quantità della forma $p - qX$, in cui a luogo di p, q vi si mettono de' valori minori, essa acquisterà un valore più grande quando $\frac{p}{q}$ è una delle frazioni convergenti verso il valore di X; proprietà che trova la sua applicazione nella seconda parte del problema 49.

53. Non resta onde compire questa teoria, che assegnar la ragione, per cui tra . . . $\frac{M^{(n-2)}}{N^{(n-2)}}$ ed $\frac{M^{(n-1)}}{N^{(n-1)}}$ non vi si può trovare una

terza frazione $\frac{\quad}{k}$, il di cui denominatore ſia fra i di loro denominatori. In effetto io la veggo nel num. III.; poichè ſupponendo che $\frac{h}{k}$ foſſe una delle frazioni convergenti intermedia fra le indicate, avremo $\frac{M^{(n-2)}}{N^{(n-2)}} - \frac{h}{k} = \pm \frac{1}{kN^{(n-2)}}$ ed . . . $\frac{h}{k} - \frac{M^{(n-1)}}{N^{(n-1)}} = \mp \frac{1}{kN^{(n-1)}}$; e però ſenza badare a' ſegni $\frac{1}{kN^{(n-2)}}$ ed $\frac{1}{kN^{(n-1)}} > \ldots$ $\frac{1}{N^{(n-2)}N^{(n-1)}}$ cioè . . . . . $kN^{(n-2)}$ e $kN^{(n-1)} > N^{(n-2)}N^{(n-1)}$; cioè . . . $k > N^{(n-2)}$, e $> N^{(n-1)}$: locchè ci moſtra

che la frazione $\frac{h}{k}$ ſuppoſta intermedia fra le indicate ha il ſuo denominatore maggiore di ambedue i denominatori di eſſe, cioè che il denominatore, è però il ſuo numeratore non può eſſere intermedio fra i denominatori e numeratori di eſſe. Ciò provandoci adunque la falſità dell' ipoteſi, ci convince, che ciaſcuna delle frazioni convergenti ſi avvicina tanto al vero valor di X, quanto non può eſſo eſprimerſi in termini più ſemplici.

54. Ecco che dopo il dettaglio delle principali proprietà ſulle frazioni continue, dettaglio che potrà eſſerci utile nel ſeguito, noi andiamo ad applicarne le idee generale, a quella loro ſpecie, che riſulta dall'evoluzione de' rotti communi, onde vedere come il ſaggio dato dall' Autore è compreſo in quello da cui veniamo; e trattare ancora il ſoggetto contenuto nel numero enunciato.

55. Sia $X = \frac{B}{A}$, in cui A, B ſono de' numeri interi e razionali; ed è chiaro che l'intero proſ-

ſimamente inferiore ad X, cioè l, non è in queſto caſo che il quoziente intero di B diviſo per A. Quindi ſe chiamo r il reſiduo di queſta diviſione, avrò $X - l = \frac{B}{A} - l = \frac{r}{A}$, e però $\frac{1}{X-l} = X' = \frac{A}{r}$. Similmente l'intero proſſimamente inferiore ad X', cioè l', non è che il quoziente intero di A diviſo per r, e quindi ſe chiamo come ſopra r' il reſiduo di queſta diviſione, avrò $X' - l' = \frac{A}{r} - l' = \frac{r'}{r}$ e però $X'' = \frac{r}{r'}$. Se nuovamente divido r per r' ne avrò l'', e quindi ſe chiamo r'' il reſiduo corriſpondente avrò $X'' - l'' = \frac{r}{r'} - l'' = \frac{r''}{r'}$ e però $X''' = \frac{r'}{r''}$; così continuando arriveremo a trovare . . . . . $X^{(n)} = \frac{r^{(n-2)}}{r^{(n-1)}}$. Quindi dalla diviſione di $r^{(n-2)}$ per $r^{(n-1)}$ ad averne $l^{(n)}$ e chiamando $r^{(n)}$ il reſiduo corriſpondente ad avere . . . . . .

mſimi, $(m+1)$eſimi, $2m$ſimi, $(2m+1)$eſimi, ec. termini delle due ſerie, e quindi colle (l. 285. 297.) le ſomme parziali degli m termini di eſſe. Le prime formule ci danno

$$\begin{array}{lll} a+d(m-1) & \cdots & aq^{m-1} \\ a+dm & \cdots & aq^{m} \\ a+d(2m-1) & \cdots & aq^{2m-1} \\ a+2dm & \cdots & aq^{2m} \\ a+d(3m-1) & \cdots & aq^{3m-1} \\ \text{ec.} & & \text{ec.} \end{array}$$

pe' termini diſtanti m fra loro nelle due ſerie, e le ſeconde ci danno

$$S = \frac{m}{2}(2a+d(m-1)) \; ; \qquad S = \frac{a^{\frac{m}{m-1}}(q^{m}-1)}{a^{\frac{1}{m-1}}(q-1)}$$

$$S' = \frac{m}{2}(2a+d(3m-1)) ; \qquad S' = \frac{a^{\frac{m}{m-1}}(q^{\frac{m(2m-1)}{m-1}}-q^{\frac{m^2}{m-1}})}{a^{\frac{1}{m-1}}(q^{\frac{2m-1}{m-1}}-q^{\frac{m}{m-1}})}$$

$S'' =$ ec. $\qquad S'' =$ ec.

per le loro corrispondenti somme parziali. Prendendo la differenza, o il quoziente di S, S', noi ne avremo $d = dm^2$ o $q = q^m$, e così la risposta che ci avevamo proposto a rilevare.

PROB. 17.

Un mobile fa miglia 9 *nel primo giorno*; 8 *nel secondo ec.: un altro ne fa nel primo giorno* 27, *e nel secondo* 18, *ec.: ambedue in progressione geometrica. Qual è il viaggio per tutta l' eternità?*

58. Le serie de' cammini de'due mobili proposti essendo decrescenti: una decrescenza per l' eternità, cioè infinita, riducendo il finito all' infinitesimo, oltre della cognizione enunciata de' primi termini delle due serie in questione e de' lor quozienti, cene porge ancor quella de' loro ultimi termini. Quindi con questi tre elementi, e col soccorso della formula (l. 299) si arriva allo sviluppo proposto. Quindi io dico facendo nella formula citata $S = \frac{uq - a}{q - 1}$, $a = 9$, $= 27$, $q = \frac{8}{9} = \frac{2}{3}$, ed $u = \frac{o}{m}$ sene avrà il risultato $x = 81$.

PROB. 18.

Due Corrieri con le celerità m ; n *partono nel punto ſteſſo l'uno da Firenze per Livorno, e l'altro di Livorno per Firenze, e la diſtanza tra queſti due luoghi è* a. *Ove ſi incontreranno?*

59. Se ſi conta x da Firenze ſino al punto di rincontro, dovrà contarſi $a-x$ da queſto punto a Livorno. Quindi i cammini che fecero nel tempo ſteſſo i due Corrieri furono x, $a-x$. Quindi abbiamo per condizione $x : a-x :: m : n$.

Quindi finalmente $x = \frac{am}{m+n}$

PROB. 19.

Un Orologio tra le 5 *e le* 6 *ha la lancetta de' minuti ſu quella delle ore: Che ora è?*

60. Suppongo che $m : 1$ ſia il rapporto delle celerità della lancetta de' minuti a quella dalla lancetta delle ore; e che x ſia il cammino, qual dovrà farſi della prima onde raggiungere la ſeconda; cammino che io ſuppongo contato dal principio di tutte le diviſioni. Dopo ciò io oſſervo che la lancetta delle ore caminerà $\frac{x}{m}$ nel

tempo che quella de' minuti percorrerà x; e che chiamato n il numero delle divisioni contenute tral principio di esse, ed una di quelle ore fra cui succesſe il rincontro, si avrà $n \mp \frac{x}{m}$ per una espressione del cammino cercato della lancetta de'minuti. Quindi si avrà $x = n \mp \frac{x}{m}$; donde.

$$x = \frac{mn}{m \mp 1}$$

Se noi adopriamo la divisione sessagesimale, cioè la divisione ordinaria delle mostre, noi avremo $x = 27' \frac{3}{11}$. Se vorremo adottare poi quella immaginata, e già oggi abbandonata, da'Francesi, cioè la decimale, noi avremo che ciascuna delle dieci ore, in cui si divide in tal caso il quadrante, contiene 10 divisioni di minuti, e però $m = 10$, $n = 50$, ed $x = 55', 55$.

Quindi conchiudo che nelle mostre a divisione ordinaria le due lancette si ritrovarono giusta la

$$\frac{B}{A} - l = \frac{r}{A} \qquad B = Al + r$$

$$\frac{A}{r} - l' = \frac{r'}{r} \qquad A = rl' + r'$$

(ovvero)

$$\frac{r}{r'} - l'' = \frac{r''}{r'} \qquad r = r'l'' + r''$$

. . . . . .

$$\frac{r^{(n-2)}}{r^{(n-1)}} - l^{(n)} = \frac{r^{(n)}}{r^{(n-1)}} \qquad r^{(n-2)} = r^{(n-1)} l^{(n)} + r^{(n)}$$

Ma riflettendo in questo luogo che l'Autore suppone $B < A$, e facendo perciò $l = 0$, è chiaro che il primo rigo di questa tavola non ci dà che $B = r$, e che però essa diviene per questo caso particolare.

$$A = Bl' + r'$$
$$r(= B) = r'l'' + r''$$
$$r' = r''l''' + r'''$$
. . . . . .
$$r^{(n-2)} = r^{(n-2)} l^{(n-1)} + r^{(n-1)}$$
$$r^{(n-2)} = r^{(n-1)} l^{(n)} + r^{(n)}$$

o pure ricavando da ciaſcuna di queſte formule il valore di B, mercè le opportune ſoſtituzioni, noi ne avremo la tavola de' ſuoi valori, cioè ne avremo la ſeguente

Tav. de' valori di B

$$B = \frac{A - r'}{l'}$$

$$B = \frac{Al'' + r''}{l'l'' + 1}$$

$$B = \frac{(l''l''' + 1)A - r'''}{l'''(l'l'' + 1) + l'}$$

$$B = \text{ec.}$$

nella quale introducendo i valori dell'$M^{(n)}$, $N^{(n)}$ cui ſi riducono quelli regiſtrate nelle tavole II. III. facendovi $l = o$, ſe ne avrà l'altra diverſamente eſpreſſa

$$B = \frac{MA - r'}{N'}$$

$$B = \frac{M'A + r''}{N''}$$

$$B = \frac{M''A - r'''}{N'''}$$

. . . . . .

$$B = \frac{M^{(n)}A \pm r^{(n)}}{N^{(n)}}$$

Quindi l'espressione generale $B = \frac{M^{(n)}A \pm r^{(n)}}{N^{(n)}}$ delle formule di questa tavola è quella che nel caso di $\frac{B}{A}$ irriducibile, e però di $r^{(n)} = 1$ ci dà $\frac{BN^{(n)}}{A} = M^{(n)} \pm \frac{1}{A}$, e ci ripete perciò che in un tal caso $BN^{(n)}$ è sempre un multiplo di A

condizione enunciata l'una sull'altra a $5^{or}\ 27'\ \frac{3}{11}$

ed in quelle a divisione decimale a $5^{or}\ 55'',55$.

PROB. 20

Tre cagioni separatamente producono i tre effetti e, e', e" *ne' tempi* t, t', t". *Qual tempo* x *impiegheranno a produrre insieme l' effetto* e"'.

61. Gli effetti dati essendo prodotti per condizione nell' indipendenza l' uno dall' altro ne' tempi dati, danno le tre proporzioni

$$t : e :: x : \frac{ex}{t}$$

$$t' : e' :: x : \frac{e'x}{t'}$$

$$t'' : e'' :: x : \frac{e''x}{t''}$$

donde sene ottiene la somma, e però l' effetto totale e''': sene ottiene cioè

$\frac{ex}{t} + \frac{e'x}{t'} + \frac{e''}{t''x} = e'''$, e quindi

$$x = \frac{e'''}{\frac{e}{t} + \frac{e'}{t'} + \frac{e''}{t''}} = \frac{e'''t\,t'\,t''}{et't'' + e'tt'' + e''tt'}$$

PROB. 21.

A pose in società il doppio di B, *e di più* 5 *lire*; *A ebbe di guadagno* 660 *lire e B* 300. *Cerco i capitali, ed il frutto.*

62. Con x marco il capitale di B, ed avrò in $2x+5$ quello di A, ed in $3x+5$ il fondo totale. Inoltre nella somma de' guadagni parziali io ho 960 lire pel guadagno totale, ed ho perciò la proporzione $960 : 300 :: 3x+5 : x$; donde $x = 25$ lire Quindi io dico che 25 lire si fu il capitale di B, 55 lire quello di A, ed al 12 per 1 il frutto dell' impiego.

PROB. 22.

Un peso un numero ed una misura di due materie vale p', p", *e con la mescolanza de' pesi numeri o misure* m', m" *di esse ne vorrei fare i pesi numeri o misure* m *di una materia media, onde un suo peso numero o misura vaglia* p. *Date quattro delle sei cose trovarne le altre due.*

63. Essendo m', m'' ed m i pesi numeri o misure delle materie date e del misto cercato, sa-

ranno $p'm'$, $p''m''$, e pm i loro prezzi rispettivi. Quindi partendo sull'ipotesi che un peso numero o misura di un misto sia eguale alla somma de' pesi numeri o misure delle materie che concorrono a formarlo (locchè và soggetto a qualche eccezione), noi avremo l'equazioni $m' + m'' = m$, $p'm' + p''m'' = pm$. Queste equazioni son quelle che date quattro delle quantità in questione ce ne danno le altre due. La ragione è evidente. La maniera onde arrivarvi è assai facile. Il tempo è prezioso e non da spendersi su questo dettaglio poco interessante.

PROB. 23.

Dovendo A *pagare a* B *una rendita* a *per* t *anni, oltre quella che scade oggi, conviene di saldarlo intieramente con abbonargli il frutto semplice ad* m *per* 100. *Quanto riscuoterà* B?

64. Una rendita può pagarsi in due maniere, cioè anticipata e posposta. Questo problema adunque può guidarci a due risultati diversi. Noi l'andiamo con un solo raziocinio a mettere sotto il dominio di una medesima formula.

Io incomincio a riflettere che se *B* verrebbe a lasciare ad *A* fino al termine dell'anno $t$simo

tutte le annualità che gli dee, è pur troppo naturale e ragionevole che egli ne avrebbe ripetuto un certo frutto, che io lo ſtabiliſco ad m per 100, per eſſere tale il frutto eſpreſſo nella condizione enunciata; ne avrebbe cioè ripetuto queſto frutto ſulla rendita a pe' ſucceſſivi periodi

I. $t, t-1, t-2, t-3, \ldots 1$

II. $t-1, t-2, t-2, t-4, \ldots 1$

e ne avrebbe perciò ottenuto gl' intereſſi . . .

I. $\frac{amt}{100} + \frac{am(t-1)}{100} + \frac{am(t-2)}{100} + \frac{am(t-3)}{100} + \ldots \frac{am}{100}$

$= \frac{amt(t+1)}{200}$

II. $\frac{am(t-1)}{100} + \frac{am(t-2)}{100} + \frac{am(t-3)}{100} + \frac{am(t-4)}{100} + \ldots \frac{am}{100}$

$= \frac{amt(t-1)}{200}$.

Quindi con queſta nuova convenzione cognetturale il credito di B contro di A dovette eſſere divenuto $at + \frac{amt(t+1)}{200}$ dopo i t anni.

L' azzardo adunque di questa nuova condizione viene a farci mutare i sensi della proposta enunciazione, e ci fa dire che „ *A* dovendo a *B* dopo un periodo di *t* anni il fondo. „ $= at + \frac{amt(t+1)}{200}$ conviene di saldarlo subito „ con abbonargli il frutto semplice ad *m* per 100 „

Con questa nuova vedura che noi abbiamo dato all'enunciazione proposta, se veniamo a chiamare *x* la somma che riceve *B* nell' istante della convenzione, e perciò *t* anni prima del tempo, in cui gli dovea il fondo $at + \frac{amt(t+1)}{200}$, è chiaro che *B* dovette lasciare ad *A* nell' anticipo del pegamento l' Interesse $\frac{mtx}{100}$ per dritto di convenzione. Quindi la somma che egli viene a ricevere nel punto di questa convenzione, si ha nell' espressione $at + \frac{amt(t+1)}{200} - \frac{mtx}{100} = x$: donde

$$x = \frac{at(200 + m(t+1))}{2(mt+100)}.$$

Il torno che abbiam dato allo ſviluppo di queſto problema, per quanto ci venghi autorizzato dal riſultato che l' autore delle lezioni mette al ſeguito dell'enunciazione, per altretanto ſembra poco ſoddisfacente alla buona ragione. La ſoluzione che naturalmente preſenta l'enunciazione propoſta è molto pronta ed evidente; e molto ſemplice ne è il riſultato cui eſſa ci guida. Mi baſta di avere avvertito i miei dubbj ſul raziocinio da me tenuto, onde ſoddisfare al riſultato che quell'autore ci dà, e di aver prevenuto il lettore ſulla diverſa ſoluzione che l' enunciazione a primo aſpetto preſenta, onde poterla eleguire.

PROB. 24.

Data al frutto ſemplice di m *per* 1 *una ſorte* c *riſolvo di conſumare in* t *anni e ſorte e frutti ſpendendo annualmente una egual ſomma* x. *Cerco* x.

65. L' intereſſe come è ad *m* per 1, ſarà *mc* quello che corriſponde alla ſorte principale: quindi $c(m+1)-x$ eſprime l' avanzo di queſta ſorte per le ſpeſe del primo anno, ed $x-cm$ la quantità di cui in eſſo diminuì. Similmente l' intereſſe ſu queſto avanzo della ſorte principa-

le essendo $m'c(m+1)-x$, ci darà l' avanzo $c(m+1)^2-x(m+1)-x$ per le spese del secondo anno; ed $(m+1)(x-mc)$ per la diminuzione corrispondente. Così ragionando noi avremo la serie degli avanzi, che io ometto, e quella delle corrispondenti diminuzioni, che io rapporto

$$x-cm$$
$$(x-cm)(m+1)$$
$$(x-cm)(m+1)^2$$
$$(x-cm)(m+1)^3$$
$$\cdots\cdots$$
$$(x-cm)(m+1)^{t-1}$$

Questa essendo una progressione geometrica sene ha prontamente in $\frac{((m+1)^t-1)(x-mc)}{m}$ l'espressione della sua somma. Quindi la condizione enuciata, che le diminuzioni successive furono tali quanto ne' t anni ne esaurirono la sorte principale, è quella che ci dà l' equazione $\frac{((m+1)^t-1)(x-mc)}{m}=x$; e con essa il valore cercato di $x=\frac{mc(m+1)^t}{(m+1)^t-1}$

PROB. 25.

Col metodo de' coefficienti indeterminati calcolare i rotti

I. $\dfrac{\pm(2ax+x^2)u+(a+x)u^2}{(a+x)^2 \pm (a+x)u}$

II. $\dfrac{(ax+x^2\pm ux)^{\frac{1}{2}} - (ax+x^2\pm au\pm ux)^{\frac{1}{2}}}{(x^2\pm ux)^{\frac{1}{2}}}$

I. Per dare in generale la forma alla ſerie, che dovrà rappreſentare il rotto propoſto, io oſſervo che le potenze di u commiuano con un cammino naturale, e ſuppongo perciò . . .

$$\frac{\pm(2ax+x^2)u+(a+x)u^2}{(a+x)^2\pm(a+x)u} = Au+Bu^2+Cu^3+\text{ec.}$$

donde ottengo $\pm(2ax+x^2)u+(a+x)u^2 =$ ..

$$Au((a+x)^2\pm(a+x)u)+Bu^2((a+x)^2\pm(a+x)u)$$

$$\pm Cu^3((a+x)^2\pm(a+x)u)+\text{ec.}$$

Quindi eſeguendo le operazioni indicate, traſ. portando tutto in un membro, ed ordinando ſecondo le potenze di u, ſene avrà . . .

Le quantità A, B, C, ec. a, x essendo indipendenti di u dovranno restare le stesse qualunque ne sia il valore. Quindi questa equazione dovendo sempre avverarsi indipendentemente de' valori particolari di u, ne avviene che divisa prima per u, e fatto quindi $u = o$, ci darà $A(a+x)^2 \mp (2ax + x^2) = o$; divisa nuovamente per u, e fattovi per la seconda volta $u = o$ ci darà $B \pm A(a+x) - (a+x) = o$, e così continuando ci darà $= o$, tutti i termini affetti dalla medesima potenza di u. Questo teorema di cui avremo occasione di farne uso nel seguito, è quello che ci dà l' equazioni . . . .

$$A(a+x)^2 \mp (2ax + x^2) = 0$$

$$B(a+x)^2 \pm A(a+x) - (a+x) = 0$$

$$C(a+x)^2 \pm B(a+x) = 0$$

ec.

onde averne

$$A = \frac{\mp(2ax+x^2)}{(a+x)^2}, \quad B = \frac{a^2}{(a+x)^3}, \quad C = \frac{\mp a^2}{(a+x)^4}, \text{ ec.}$$

e quindi

$$\frac{\pm(2ax+x^2)u+(a+x)u^2}{(a+x)^2 \pm (a+x)u} = \pm\frac{(2ax+x^2)u}{(a+x)^2}$$

$$\mp\frac{a^2u^2}{(a+x)^3} \mp \frac{a^2u^3}{(a+x)^4} + \text{ec.}$$

II. Per ſviluppare in ſerie i tre radicali componenti la frazione propoſta, io vi oſſervo rapporto ad u due termini in ciaſcuna; vi oſſervo inoltre le potenze 0, 1 di u; e vi oſſervo perciò nelle potenze di eſſo l'ordine naturale, incominciando però dal zero. Quindi ſuppongo

$$(ax+x^2 \pm xu)^{\frac{1}{2}} = A + Bu + Cu^2 + \text{ec.}$$

$$(ax+x^2 \pm au \pm xu)^{\frac{1}{2}} = A' + B'u + C'u^2 + \text{ec.}$$

$$(x^2 \pm xu)^{\frac{1}{2}} = A'' + B''u + C''u^2 \pm \text{ec.}$$

Quadrando, ordinando alle potenze di u, e traſportando il tutto in un membro, noi avremo

$$0 = A^2 + 2ABu + B^2u^2 + 2BCu^3 + \text{ec.}$$
$$-(ax + x^2) \mp x + 2AC + 2AD + \text{ec.}$$

$$0 = A'^2 + 2A'B'u + B'^2u^2 + 2B'C'u^3 + \text{ec.}$$
$$-(ax + x^2) \mp (a + x) + 2A'C' + 2A'D' + \text{ec.}$$

$$0 = A''^2 + 2A''B''u + B''^2u^2 + 2B''C''u^3 + \text{ec.}$$
$$x^2 \mp x + 2A''C'' + 2A''D'' + \text{ec.}$$

donde l' equazioni

$$A^2 - (ax + x^2) = 0,\ 2AB \mp x = 0,\ B^2 + 2AC = 0,$$
$$2BC + 2AD = 0,\ \text{ec.}$$

$$A'^2 - (ax + x^2) = 0\ 2A'B' \mp (a + x) = 0,\ B'^2 + 2A'C' = 0$$
$$2B'C' + 2A'D' = 0,\ \text{ec.}$$

$$A''^2 - x^2 = 0,\ 2A''B'' \mp x = 0,\ B''^2 + 2A''C'' = 0$$
$$2B''C'' + 2A''D'' = 0,\ \text{ec.}$$

68. Da queſte equazioni deducendo i valori di A, B, ec.; A', B' ec.; A'', B'', ec.; ſi avrà

$$\sqrt{(ax \pm x^2 \pm xu)} = \sqrt{(ax \pm x^2)} \pm \frac{xu}{2\sqrt{(ax \pm x^2)}}$$

$$- \frac{x^2 u^2}{8\sqrt{(ax \pm x^2)^3}} \pm \frac{x^3 u^3}{16\sqrt{(ax \pm x^2)^5}} - \text{ec.}$$

$$\sqrt{(ax \pm x^2 \pm au \pm ux)} = \sqrt{(ax \pm x^2)} \pm \frac{(a \pm x)u}{2\sqrt{(ax \pm x^2)}}$$

$$- \frac{(a \pm x)^2 u^2}{8\sqrt{(ax \pm x^2)^3}} \pm \frac{(a \pm x)^3 u^3}{16\sqrt{(ax \pm x^2)^5}} - \text{ec.}$$

$$\sqrt{(ax \pm xu)} = x \pm \frac{1}{2}u - \frac{u^2}{8x} \pm \frac{u^3}{16x^2} - \text{ec.}$$

e perciò

$$\frac{\sqrt{(xa \pm x^2 \pm ux)} - \sqrt{(ax \pm x^2 \pm au \pm xu)}}{\sqrt{(ax \pm xu)}} = \ldots$$

$$\frac{\mp au}{2\sqrt{(ax+x^2)}} + \frac{(a^2 \mp 2ax)u^2}{8\sqrt{(ax+x^2)^3}} \mp \frac{(a^3 + 3a^2x + 2ax^2)u^3}{16\sqrt{(ax+x^2)^5}}$$

$$x \mp \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8x} \mp \frac{u^3}{16x^2} \cdots$$

$$= Au + Bu^2 + Cu^3 + \text{ec.}$$

Donde ſene ottiene finalmente

$$\frac{\sqrt{(ax+x^2 \mp xu)} - \sqrt{(ax+x^2 \mp au \mp xu)}}{\sqrt{(x^2 \mp xu)}} = \frac{\mp au}{2x(ax+x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+ \frac{(3a^2 + 4ax)u^2}{8x(ax+x^2)^{\frac{3}{2}}} \mp \frac{(5a^3 + 12a^2x + 8ax^2)u^3}{16x(ax+x^2)^{\frac{5}{2}}} \text{ ec.}$$

PROB. 26.

Sommare i rotti decimali I. 0,00330033 *ec.*

II. 0,4059090 *ec.*

69. Se chiamo n le cifre del periodo di un rotto decimale continuo, ed m quelle dopo cui viene ad incominciare, avrò in generale . . . ;

$$\frac{m}{10^m} + \frac{n}{10^{m+n}} + \frac{n}{10^{m+2n}} + \frac{n}{10^{m+3n}} + \text{ec.}$$

per la ſua eſpreſſione; eſpreſſione che dal ſecondo termine in poi forma una ſerie a quoziente. Quindi conoſcendo in queſta ſerie tre elementi, cioè il primo termine $\frac{n}{10^{m+n}}$, il quoziente $\frac{1}{10^{n}}$, e l'ultimo termine $\frac{n}{\infty}$, ſene otterrà (l. 295) il termine ſommatorio . . . . $\frac{n10^{n}}{10^{m+n}(10^{n}-1)}$. Quindi marcando con S la ſomma cercata ſi avrà $S = \frac{m}{10^{m}} \cdots + \frac{n10^{n}}{10^{m+n}(10^{n}-1)} = \frac{n+m(10^{n}-1)}{10^{m}(10^{n}-1)}$.

70. Per applicare queſta formula generale, con cui ſi ottiene la ſomma di qualunque frazione decimale periodica, ſia perfetta ſia imperfetta, alle due frazioni enunciate, io avverto che quando m, n ſono alla condizione di eſponenti rappreſentano il numero ſola

mente delle cifre del periodo: laonde non essendo in questa condizione rappresentano il periodo stesso.

Quindi abbiamo I. $m = 0$, $n = 0033$, $= 4$,

$$\text{ed } S = \frac{33}{9999} = \frac{1}{303}$$

Quindi abbiamo II. $m = 405$, $= 3$, $n = 90$, $= 2$;

$$\text{ed } S = \frac{40185}{99000} = \frac{893}{2200}$$

PROB. 27.

Sommare n *termini della serie* . . . .

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{9}{x^3} + \frac{16}{x^4} + \text{ec.}$$

71. Questo problema, in cui dovrò parlare di serie, mi presenta l'occasione a dare un' idea sull' origine loro in analisi; sulla distinzione delle principali lor specie; sulla maniera onde la loro interpolazione si effettua: e ciò non per altro che per soddisfare ad una qualche richiesta; che ad evitare la confusione di una specie coll'altra, come mi è successo vedere; che

a prevenire l' errore, in cui ho veduto qualche volta cadere, di poterſi una ſpecie maneggiare e trattarſi colle formule che ad un' altra ſpecie appartengono.

La ſomma e la ſottrazione, la moltiplicazione e diviſione, l' elevazione a potenze ed eſtrazion di radici ſulle grandezze in generale, formano il ſoggetto dell' Algebra. È il mezzo onde le formule riſultanti da queſte operazioni s'impiegano alla ſoluzion de' problemi ne fanno quella della parte di eſſa che porta il nome di Analiſi La relazione il rapporto la dipendenza fra le grandezze cognite ed incognite di un problema ne ſono le condizioni: e le condizioni tradotte nel linguaggio tutto proprio dell' Algebra ne fanno l'equazioni ond' eſſo ſi ſcioglie. La ſoluzione adunque di un problema ſempre preſenta alle noſtre vedute l' idea di una relazione di un rapporto di una dipendenza fra certe grandezze: Queſta relazione queſto rapporto queſta dipendenza è ciò che oggi ſi eſprime in analiſi col nome *funzione*. L' Algebra adunque è la ſcienza delle grandezze in generale: e l' analiſi propriamente parlando è la parte di queſta ſcienza

che si versa sul calcolo delle funzioni. Le funzioni di cui oggi si è l'analisi co'suoi progressi arricchita sono di un numero grande e per così dire infinito. Vi sono delle funzioni, dette algebriche, la di cui espressione sotto la propria forma è limitata e finita: e vene son delle altre, che trascendenti si dicono, le quali non possono esprimersi che con un progresso di monomj illimitato e infinito. Le funzioni algebriche quantunque sotto la propria forma hanno un'espressione limitata e finita; frattanto possono ancor valutarsi con un progresso finito o infinito di varj monomj. Le potenze intere e positive di un binomio si possono esprimere con un progresso di termini ma limitato e finito: le frazionarie però e le negative, le frazioni, che sono tutte algebriche funzioni, non si possono esprimere che sempre con altri illimitati e infiniti. I logaritmi, le funzion circolari, che sono delle funzion trascendenti, non si posson avere che in progressi di termini sempre illimitati e infiniti. Quindi gli aggregati di termini con cui si valutano le funzioni algebriche son capaci di esser ridotti ad un' espressione limitata, e

finita: laonde quegli altri con cui sen' esprimono le trascendenti non possono in alcuna maniera esser mute nel loro infinito andamento Ecco l' origine adunque delle serie; delle serie capaci di somma e insommabili; delle serie finite e infinite.

Quei progressi, cui le funzioni di qualunque specie ci portano, ed in cui i termini componenti comminano con un certo ordine con una certa legge costante ed a tutti comune, si distinguono col vocabolo *serie*. Quelle serie, che mercè alcuna operazione qualunque possono ridursi ad una espressione limitata e finita si chiaman sommabili; ed insommabili quelle altre si dicono che affatto ricusano questa riduzione Le serie son finite o infinite secondo che hanno un numero finito o infinito di termini. Le potenze intere e positive di un binomio, e le potenze negative di esso ci danno di questa doppia specie di serie un esempio. Le serie sono dippiù divergenti o convergenti secondo che i termini componenti camminano crescendo o decrescendo. Le serie divergenti quanto più continuate tanto più si discostano dal valore delle

funzioni cui esse appartengono, e ne esprimon perciò il solo sviluppo: le convergenti al contrario tanto più visi accostano, e ne rappresentano lo sviluppo insieme e il valore. Le funzioni potendo all' infinito variare fi che stragrande sia il numero delle serie in analisi. Le serie insommabili sono assai più delle sommabili. Fra queste le Algebriche, le geometriche, le algebrico-geometriche ne sono le specie principali. Le algebriche son quelle che formansi di progressioni aritmetiche; le geometriche di progressioni geometriche; e le algebrico-geometriche di serie algebriche e geometriche. Queste tre specie di serie distinguonsi in ordini. Si dicono dell'n (sebbene l'autore delle lezioni dica dell'$n-1$) ordine le algebriche coll'n differenze costanti, le geometriche provenienti da n progressioni geometriche, le algebrico-geometriche in cui gli ordini delle due serie componenti fanno n.

Lo sviluppo delle frazioni proprie razionali genera una specie di serie in cui un termine qualunque risulta costantemente da un determinato numero de'precedenti moltiplicati in quantità costanti. Queste serie, dette dagli analisti *ricorrenti*, distinguonsi anch'esse per ordini: e si dicono dell'ordine n quelle in cui alla formazione di un termine vene concorrono

n de' precedenti. Le progreſſioni aritmetiche in cui ciaſcun termine è funzione de' due che lo precedono ſon ſerie ricorrenti del ſecondo ordine; e le geometriche lo ſono del primo in quanto ogni termine dipende dal precedente ſoltanto. Quindi le ſerie algebriche e geometriche, e perciò le algebrico-geometriche ſon tutte compreſe nella claſſe delle ricorrenti.

L' autore delle lezioni parla delle ſerie algebriche, di alcune ſpecie particolari dell'algebrico-geometriche, e nulla ci dice delle geometriche, algebgeometriche in generale, e ricorrenti. Quindi ſoggiungo quì di paſſaggio che quando delle ſerie geometriche ſene conoſcono le progreſſioni che le compongono, e dell'algebrico-geometriche le ſerie che vanno a formarle: quando ſi conoſce dippiù il modo onde le une e le altre combinanſi per tale compoſto: allora ſene hanno i termini e le ſomme generali col combinare nel modo ſteſſo i termini e le ſomme generali delle ſerie componenti. Quando però nè le ſerie componenti, nè il modo ond'eſſe concorrono a compor le compoſte ci è conoſciuto; allora per averne i termini e le ſomme generali biſogna ricordarſi che eſſe ſon ſerie ricorrenti, e perciò che poſſon trattarſi col metodo onde queſte ſi trattano.

Una ſerie ricorrente ſi ſomma completamente in infinito col riſalire alla frazione ond' è venuta. Per vedere in riſtretto come ciò ſi eſeguiſce ſia

$$a+a'z+a''z^2+\ldots a^{(i)}x^i+\text{ec.}$$

una ſerie qualunque, e ſia

$$(b+b'z+\ldots b^{(i)}z^i\text{ ec.}):(1-cz-c'z^2-\ldots c^{(i)}z^{i+1}\text{ ec.})$$

la frazione onde proviene: ſia cioè

$$(b+b'z+\ldots b^{(i)}z^i\text{ ec.}):(1-cz-c'z^2-\ldots c^{(i)}z^{i+1}\text{ ec.})$$
$$=a+a'z+a''x^2+\ldots a^{(i)}z^i+\text{ec.}$$

e s'avranno i val. (A); $a=b$, $a'=b'+ac$, $a''=b''+a'c+ac'$, $\ldots a^{(i)}=b^{(i)}+a^{(i-1)}c+a^{(i-2)}c'+\ldots a^{(r-1)}c^{(i-r)}$ ec.

Oſſervo ora queſti valori e veggo che quando il numeratore e denominatore della frazione generatrice ſono limitati in maniera quanto il maſſimo numero i degli apici non ſia nel primo maggiore che nel ſecondo, allora ciaſcuno di eſſi è coſtantemente l'aggregato de' prodotti parziali di un numero determinato di quei che lo precedono ne' coefficienti di quel denominatore. Quindi la ſerie propoſta è ſempre ricorrente quando la frazione generatrice è propria e non ſpuria: quindi conoſcendo la legge con cui una ſerie ricorre, e perciò le quantità moltiplicatrici $c''\ldots^{i}$ de' termini precedenti che concorrono a formarne uno qualunque di eſſa, cioè la *ſcala di relazione*, ſi conoſcerà nell'atto ſteſſo il denominatore della frazione generatrice, colle formule (A) il ſuo numeratore, e perciò la ſomma cercata.

Il termine generale di una ſerie ricorrente ſi ottiene collo ſcomporre ſimilmente a' numeri (l. 1074. 1076) la frazion-ſomma nelle ſue frazioni ſemplici; collo ſvolgere in ſerie queſte frazioni; e col ſommarne infine i termini generali riſpettivi che ſanno ſempre aſſegnarſi.

Una ſerie ricorrente perfine ſi ſommarſi in un numero finito *n* di termini, perchè la ſomma in infinito di eſſa oltre l'*n* ſuo termine ſi ottiene nel modo ſteſſo onde ſene ha quella di tutti i ſuoi termini, e perchè ſottraendo la prima dalla ſeconda ſomma non dee averſene che la finita propoſta.

Un'applicazione di queſto metodo può vederſi nella ſerie enunciata. Infatti eſſendo 3, −3, 1 la ſua ſcala di relazione, ſarà $(x-1)^3 : x^3$ il denominatore, $(x+1):x^2$ il numeratore della frazione ſua generatrice, epperò $x(x+1):(x-1)^3$ la ſomma completa in infinito di eſſa; il ſuo termine generale, è manifeſto ed $= n^2 : x^n ; (n^2(x-1)^2 + x(x+1) + 2n(x-1)x) : x^n (x-1)^3$ la ſua ſomma in infinito oltre l'*n* ſuo termine, e finalmente la ſomma (p 103.l.7) de' primi ſuoi *n* termini.

Tanto baſta ſu tale ſoggetto. Queſto tratto eſtemporaneamente e così di volo abbozzato non ha permeſſo che io entraſſe in più minuti dettagli. Paſſiamo intanto a ſommar la ſerie enunciata colle formole (l. 341). Prendiamone perciò la formola del valore di *T*: paragoniamola colla $T = n^2 : x^n$ della ſerie in queſtione e ne avremo finalmente $a = 1$

$b = \text{ec.} = c$, $m = 2$, $h = x = q$; e quindi ſoſtituendo queſti valori nella . . . . . ;

$$S = -\frac{1}{hq^{n-1}(q-1)^2}\left((q-1)an^m + (amq+(q-1)b)n^{m-1}\right.$$

$$\left.+\frac{(m(m-1)aq^2q+1)}{2(q-1)} + (m-1)bq+(q-1)c)\,n^{m-2} + \ldots \times -(q^n-1)\right)$$

della ſomma generale ivi data, ſene avrà . . .

$$S = \frac{-1}{x^n(x-1)^2}\left((x-1)n^2 + 2nx - \frac{x(x+1)}{x-1}(x^n-1)\right)$$

$$= \frac{x(x+1)(x^n-1)}{x^n(x-1)^3} - \frac{n}{x^n(x-1)}\left(\frac{2x}{x-1}+n\right)$$

per quella che forma il ſoggetto delle domande propoſte.

Per interpolare una ſerie altro non s'intende che inſerire fra due termini conſecutivi qualunque di eſſa un certo numero di altri termini, i quali conſervin tra loro la legge ſteſſa della data.

Sia $a, a', a'', a''', \ldots a^{(r-1)}, a^{(r)}$, ec. la ſerie da interpolarſi, e ſia m il numero de' termini che vi ſi vogliono interpolare. Quindi incomincio a

riflettere che per ogni termine, eccetto il primo, della ſerie data ſene hanno $m+1$ nell' interpolata, e perciò il numero de' termini che la ſerie propoſta avrà dopo la ſua interpolazione fino al ſuo termine generale $a^{(r)}$ ſarà $r' = r(m+1)+1$. Queſta eſpreſſione dandoci $r = \frac{r'-1}{m+1}$ ci dà il termine generale della ſerie interpolata; poichè ſuppoſto conoſciuto l'$a^{(r)}$ della propoſta ſi avrà nell' atto ſteſſo $a^{(\frac{r'-1}{m+1})}$ per quello ad eſſa corriſpondente dopo la ſua interpolazione. Trovato il termine generale della ſerie interpolata ſi è arrivato al termine della queſtione, poichè col ſuo mezzo ſi ha tutta la ſerie interpolata. Per vedere il tutto più da vicino e più chiaramente proponiamoci d'interpolar di due termini la ſerie enunciata. Per queſto caſo noi abbiamo $m = 2$, $r = \frac{r'-1}{3}$, $n = r+1 = \frac{r'+2}{3}$

e $T(=\frac{n^2}{x^n}) = \frac{(\frac{r'+2}{3})^2}{\frac{r'+2}{x^3}}$. Quindi facendo ſucceſſivamente $r' = 1 = 2 = 3 = 4 = 5 =$ ec. ſene avrà la ſerie interpolata

$$\frac{1}{x} + (\frac{4}{3}) : x^{\frac{4}{3}} + (\frac{5}{3})^2 : x^{\frac{5}{3}} + \frac{2^2}{x^2} \text{ &c.}$$

$$(\frac{7}{3})^2 : x^{\frac{7}{3}} + (\frac{8}{3})^2 : x^{\frac{8}{3}} + \frac{3^2}{x^3} \text{ &c.}$$

ſerie in cui i denominatori formano una progreſſione geometrica, e i numeratori una ſerie algebrica del ſecondo ordine come nella enunciata.

Se la circoſtanza non domanda l' interpolazione per intero della ſerie, ma ſoltanto di due termini conſecutivi qualunque; allora non occorre incominciar dal principio di eſſi l' inter-

polazione onde averne interpolati i termini proposti, ma basta incominciare i valori di r' da quello in cui $\frac{r'-1}{m+1}$ risulta $= r$, cioè bisogna incominciare da $r(m+1)+1$ i valori di r'. Come per esempio se i due termini verranno interpolarsi fra il terzo e quarto solamente della serie enunciata; allora sarà $n=3$, e però $r=2$, $r'=7=8=9=10$ ce li dà in $T = \frac{x^2}{x^3} = \frac{(x^{\frac{10}{3}})^2}{x^{\frac{10}{3}}}$ $= \frac{(x^{\frac{11}{3}})^2}{x^{\frac{11}{3}}} = x^4$. Se de'termini interpolati non sene vuol di tutti la cognizione, ma sene ha di bisogno quella di un solo; allora chiamando r'' il numero indicante il posto del termine cercato basta fare $r' = r(m+1)+1+r''$. Infatti se il secondo solamente de' due termini interpo-

lati è quello che si vuol conoscere, allora si avrà $r'' = 2$, e però essendo $m = 2$, $r = 2$, sarà

$r' = 9$, e $T = \dfrac{(\frac{11}{3})^2}{\frac{11}{3} \times x}$ il termine cercato.

Questo metodo d'interpolazione suppone conosciuto il termine generale, e perciò la legge della serie da interpolarsi; l'oggetto in generale però dell'interpolazione è di determinare de' valori intermedj fra certe osservate quantità senza conoscere la legge onde sono formate. Questo metodo adunque non può soddisfare a questo oggetto. Riflettendo però che l'interpolazione mira per l'ultimo fine la matematica pratica; che la matematica pratica renuncia al rigore de risultati, e si contenta di un' approssimazione soltanto; che la principale perfezione de' metodi riguardanti la pratica consiste nello spingere più verso il vero questa approssimazione: riflettendo a tuttociò; si resta convinto che il metodo di cui abbiamo parlato se non può a rigor geometrico soddisfare al fine dell'interpolazione,

vi può però a rigor pratico e proſſimamente: In effetto ſebbene una ſerie di oſſervazioni non conſervi una legge coſtante una legge perfetta, è facile frattanto ſcoprire il ſuo andamento quantunque incoſtante e imperfetto; ſcoperto queſto ſuo andamento è facile fra le ſerie di cui ſene conoſce perfettamente la legge trovarne quella che più ad eſſo avvicinaſi: trovata queſta ſerie potrà eſſa trattarſi a luogo della propoſta, e così arrivare con eſattezza, nò già geometrica ma fiſica, alla conoſcenza delle oſſervazioni intermedie che avrebbero luogo fra i termini oſſervate di quella. Quanto Lalando ci ha fatto vedere, cioè che l'interpolazione delle oſſervazioni aſtronomiche può trattarſi ſenza errore ſenſibile nella più parte de'caſi come ſe foſſe delle ſerie algebriche del ſecondo ordine; può opportunamente ſervirci di eſempio e di pruova.

I progreſſi del calcolo alle differenze han dato con tanta di generalità che di ſublimità inſieme e di analiſi la ſoluzione del problema delle interpolazioni. Queſto non è il luogo a parlare di teorie tanto complicate e ſublimi Ne parleremo forſe in un altro lavoro: e dirigiamo ſoltanto perora chi vorrà eſſere a giorno del-

la bellezza di queſte ſoluzioni, al calcolo differenziale e integrale del Lacroix n. 873. e ſeg.

Queſto tratto, per cui abbiamo rapidamente paſſato, ci preſenta il quadro a formarci un' idea delle ſerie. In queſto quadro ſi veggono naſcer le ſerie fin da' primi principj dell' algebra: ſene oſſervano dipinte le ſpecie con colori chiari e diſtinti: ſe ne ſcorge l'interpolazione abbozzata in una maniera ſemplice e piana: Queſto tratto adunque ſoddisfacendo a quanto ſul principio per le addotte ragioni m' impoſi, permette che io paſſi alle teorie, a cui mi chiamano l' enunciazioni ſeguenti.

PROB. 28.

Per la regola di doppia falſa poſizione calcolare il valor di r *nell' equazione* $r^r = 2000$.

72 I logaritmi applicati all' equazione enunciata mi danno *A*... $r \log r = \log. 2000 = 3,30103$. Quindi vengo a ſupporre $r = a = 4$., onde avrò dalla *A*, $4 \log. 4 = 2,40824 = 3,30103$, cioè avrò un errore $m = 0,89279$. Un errore poſitivo mi convince di eſſere ſtata troppo piccola l'ipoteſi azzardata per *r*. Quindi paſſo ad una ſeconda più grande, e ſuppongo $r = b = 5$; da cui ne ho

$5 \log. 5 = 3,49485 = 3,30103$, e però un nuovo errore $n = -0,19382$: applicando alla formula (l. 316) $B_{..,r} = \frac{an + bm}{m + n}$ queste due ipotesi, ne avremo $r = 4,8216$. Questo risultato mi mostra che il vero valore di r è tra $4,8$ e $4,9$. Quindi passo a stabilire due altre ipotesi per r, cioè $r = a = 4,8$ ed $r = b = 4,9$; onde avrò mercè la A i due errori $m = 0,310722$, $n = -0,0809304$; e mercè la B, $r = 4,827725$.

Offervo i due risultati di r, e vi veggo essere identiche le prime tre cifre, e vi veggo perciò che la seconda correzione per r, cui questo metodo ci ha guidato, non cade che sulla quarta: quindi conchiudo che il vero valor di r è certamente tra $4,82$ e $4,83$. Passo pertanto a supporre $r = a = 4,82$, $r = b = 4,83$, onde averne colla A gli errori $m = 0,0087435$, $n = -0,0024345$, e colla B, $r = 4,827832$.

73 L'identità delle prime quattro cifre di questo, e del valore precedente di r, mi dice, di riguardare tra $4,827$, e $4,828$ il valore di r, e di supporre perciò successivamente $r = a = 4,287$, $r = b = 4,828$,

per quindi dedurne dalla *A* gli errori 0, 0009197, −0, 0001985, e con essi dalla *B*, $r = 4,827839$. Le prime sei cifre di questo e del risultato precedente sono le stesse, e perciò colla ripetizione de' medesimi calcoli partendo da nuove ipotesi non potrei sperare un' approssimazione maggiore che nella settima cifra. Quindi è che posso prendere per rigorosamente approssimato il valor di $r = 4,8278$ onde rispondere alla questione enunciata. Raccolgo intanto le diverse parti dell' operazione già da noi esposta, onde metterle tutte sott' occhi, nella seguente tavola.

Equ: *A*...$r \log. r = 3,30103$ — Eq. *B*...$r = \frac{an \mp bm}{m + n}$

1.. ip. $r = a = 4$...err $m = 0,89279$

2.. ip. $r = b = 5$...err. $n = -0,19382$ — $r = 4,8216$

3.. ip $r = a = 4,8$...err. $m = 0,0310722$

4..ip. $r = b = 4,9$...err. $n = -0,0809304$ — $r = 4,827725$

5..ip. $r = a = 4,82$...err. $m = 0,0087435$

6..ip. $r = b = 4,83$...err. $n = -0,0024345$ — $r = 4,827832$

7..ip. $r = a = 4,827$...err $m = 0,0009197$

8...ip. $r = b = 4,828$...err. $n = -0,0001985$ — $r = 4,827839$

PROB. 29.

Le cifre di un numero ſon tali che il loro prodotto è 54, *la ſomma delle eſtreme diviſa per la media è* 6, *e ſottratto* 594 *dal numero ſi hanno le tre cifre ſteſſe in ordine inverſo. Che numero è?*

74. Chiamo xyz il numero cercato, il quale poſto ſotto la forma $100x + 10y + z$ mi dà le tre equazioni $xyz = 54$, $\frac{x+z}{y} = 6$, $100x + 10y + z - 594 = 100z + 10y + x$, cioè $x - z = 6$, onde ſoddisfare alle condizioni enunciate. Queſt' equazioni mi danno poi, coll'eliminazione $x = 6 + z$, $y = \frac{z^2 + 3z}{y}$ e $z^3 + 9z^2 + 18z - 162 = 0$. Il tutto adunque ſi riduce a ricavar da queſta il valore di z: valore che non ſolo dee riſultare reale, ma razionale ancora e poſitivo, acciò non ſia in contradizione colla propoſta enunciazione.

Oſſervando l' equazion finale $z^3 + 9z^2 + 18z - 162 = 0$ veggo nel ſuo ultimo termine negativo, e nel ſuo grado impari che le ſue radici

debbono essere o due immaginarie ed una reale positiva, o tutte tre reali positive, o finalmente due reali negative ed una positiva: veggo inoltre nel suo secondo termine positivo negato il caso di tutte tre radici reali positive: quindi conchiudo che questa equazione non può avere che una sola radice reale positiva, e che il problema proposto non può ammettere che una sola soluzione: soluzione che ammetterà ineffetto se questa radice è razionale.

75. Per avere questa radice, se esiste, io incomincio a riflettere che una equazione qualunque $z^m + az^{m-1} + bz^{m-2} + cz^{m-3} + \ldots t = 0$ di cui tutti i coefficienti sono interi, non può avere che intere le sue radici razionali, poichè se si nota con $z = \frac{p}{q}$ una di queste radici, ni cui p, q sono de' numeri interi e primi tra loro si avrà $\frac{p^m}{q^m} = -\frac{1}{q^{m-1}}(ap^{m-1} \pm bqp^{m-2} \pm \ldots cq^2 P^{m-2} \pm \ldots \pm tq^{m-1})$; cioè

$$\frac{p^m}{q} = -(ap^{m-1} + bqp^{m-2} + cq^2 p^{m-3} + \ldots tq^{m-1})$$

$= E$ (num. intero); cioè ſupponendo fratta la radice ſi avrà un riſultato impoſſibile. Proſieguo a riflettere dopo ciò che l'ultimo termine eſſendo ſempre il prodotto di tutte le radici, ne avviene che le razionali debbono ſempre trovarſi tra i fattori interi di eſſo. Quindi ſe ſi mettono ſucceſſivamente per l'incognita in un' equazione tutti i fattori interi del ſuo ultimo termine ſi vedrà quali e quanti ſon quelli che la riſolvono, e perciò ſe eſſa ha o nò delle radici razionali, e quante ne ha. Su di queſte rifleſſioni è fondato il metodo a trovare le radici razionali di un' equazione conoſciuto; ſotto il nome de' diviſori dell' ultimo termine: metodo che io vengo ad applicare al caſo in queſtione.

76. Troppo lungo riuſcirebbe ſovente l' uſar queſto metodo nell' eſpoſta maniera. Quindi è che ſi abbia penſato di fiſſare il carattere particolare di quei fattori dell' ultimo termine ſu di cui debbono cadere le radici cercate La determinazione di queſto carattere è dipendente dal-

la trasformazione dell' equazioni. Supponendo in un' equazione l' incognita $z = u \pm 1$, senza altra operazione che di mutare in essa z in ± 1 noi ne avremo gli ultimi termini t_1, t_2 delle due trasformate che ne risultano. Quindi notando con d la parola divisore, avremo $u = \pm dt_1 = \pm dt_2$ e perciò $z = \pm dt_1 + 1 = \pm dt = \pm dt_2 - 1$: locchè c' insegna che fra i divisori di t quelli saranno i valori di z, che si troveranno tra i divisori di t_1 accresciuti, e tra quelli di t_2 diminuiti dell' unità.

77. Per applicarvi l' equazione di cui si tratta io vi faccio $z = u \pm 1$ e ne avrò $t_1 = -134$, $t_2 = -172$; e perciò dovendo z esser positiva ne avrò $z = d134 + 1 = d162 = d172 - 1$. Quindi trovando che fra i divisori di 162 il solo + 3 è quello si vede tra i divisori di 134 accresciuti e fra quelli di 172 diminuiti di 1, conchiudo che $z = 3$, e però $x = 9$, $y = 2$; e finalmente che il numero cercato $xyz = 923$.

PROB. 30.

Il Comandante di una fortezza assediata scrive al suo Generale che tante sono le centinaja de' suoi soldati quante le unità nella radice positiva dell' equazione $x^4 + 7x^3 - 2x^2 - 18x = 28$. *Il biglietto viene in mano degli assediati che non intendon la cifra. Come la spiegherete?*

78. Per ispiegare la cifra del biglietto enunciato non si tratta che di risolvere l' equazione in esso proposta, Con un razicinio simile a quello del problema precedente io potrei determinare che una è la radice positiva di questa equazione e che 200 ne è la sua qnantità: ma volendo far conoscere il metodo generale e sublime, che l' immortale Lagrange ci ha dato nelle memorie di Berlino (an. 1768.) per la soluzione numerica dell' equazioni, io me ne allontano: e ciò ancora perchè in esso dovrò dimostrare molti teoremi, di cui manca l'algebra delle lezioni.

79. Un' equazione non può avere che delle radici razionali eguali o ineguali, delle radici irrazionali eguali o ineguali, e delle radici immaginarie. Il metodo di Mayer proposto nelle Memorie di Pietroburgo (an. 1728), di cui

quello del Lagrange non ne è in fondo che il compimento e la perfezione, ci dà direttamente nel primo caso le radici, cene assegna i limiti nel secondo, e cene suggerisce nel terzo gli argomenti certi e sicuri. Questo metodo adunque comprende in un modo il più generale tutte le ricerche che si posson proporre sulla soluzione numerica dell'equazioni.

Il termine generale delle serie algebriche è una equazione del grado m, la cui incognita è la caratteristica del suo numero di termini. Quindi se in un'equazione qualunque si fa passare l'incognita per tutti i termini della serie naturale de' numeri, sene avrà sempre un seguito che formerà una serie algebrica, e che qualche analista ha chiamato serie dell'equazione. Tutti i termini zero di questa serie indicheranno nel corrispondente de' valori dell'incognita una radice dell'equazione: tutti i cambiamenti di segno fra i termini di essa mostreranno de' passaggi per zero, e però delle radici fra quei termini de' valori dell'incognita, che producono tali cambiamenti. Quindi il carattere di questa serie dell'equazione ci dà prontamente le radici se l'e-

quazione cui appartiene ne ha delle razionali, o i limiti di queſte radici ſe eſſe non ſono che irrazionali.

Si rifletta però che quando la differenza k della ſerie naturale de' valori dell' incognita ... o, k, 2k, 3k, 4k, ec, è maggiore della più picciola differenza fra le radici della propoſta equazione, allora appariſce che fra un ſuo termine e l'altro vi poſſono eſſer contenute più di una radice; ma ſempre però in numero diſpari come vedremo (198), e poſſono perciò gl' iſteſſi limiti appartenere a più radici. Quindi per avere i limiti di tutte le radici biſogna prendere $k \leq$, o $<$ della più picciola differenza fra queſte radici. E' indiſpenſabile adunque la ricerca di k ſotto tale condizione; ricerca per altro che ci moſtrerà il numero delle radici eguali ed immaginarie contenute nell' equazione. Gli argomenti ſull'eſiſtenza di queſte radici indipendentemente della ricerca che or veniamo di notare, ſi poſſono apprendere negli *Elementi teorico-pratici del P. Gherli* v. 2. *p.* 246. e ſeg., in cui ſi trova ſviluppato ne' più minuti dettagli il metodo di Mayer di cui abbiamo già fatto parola.

80. Noi divideremo intanto la somma di tutte le nostre ricerche in due parti. Nella prima troveremo in generale la più piccola differenza fra tutte le radici di una equazione qualunque con applicarla a quella che forma il soggetto del proposto problema; e nella seconda vedremo una delle semplicizzazioni di cui il metodo stesso è capace.

I. Se in una equazione si mette $-x$ per x; se si cambia cioè il segno a tutti i termini suoi, ne' quali x vi entra con dimensioni dispari, allora verrà essa a mutarsi in un' altra, le cui radici non sono che le stesse, ma con segno contrario. La ricerca adunque delle radici negative di una equazione si riduce a quella delle positive, previa soltanto l' indicata mutazione ne' segni. Non parleremo perciò che delle sole radici positive: potendo il metodo stesso adoprarsi per le negative.

81. Io rifletto a tale oggetto che un' equazione con segni alternativi non ha che positive le sue radici, poichè la sostituzione di una quantità negativa rendendo i suoi termini o tutti positivi, o tutti negativi non potrebbe giammai

ridurla a zero. Quindi la forma da darsi ad una equazione le di cui radici si suppongono positive si è $(A)..x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - ..\pm Rx^2 \mp Sx \pm T = o$; avvertendo che il segno superiore corrisponderà sempre ad m pari, e l'inferiore ad m impari.

Se noi trasformiamo questa equazione in un altra le di cui radici sieno le differenze di quelle di essa, allora noi avremo un mezzo facile, onde avere una quantità che sia minore della più picciola di esse. Infatti se $y^n + A'y^{n-1} + B'y^{n-2} + \text{ec.} = o$ rappresenta questa trasformata, e se si farà in essa $y = \frac{1}{z}$ avremo la . . . .

$(C)...z^n + A''z^{n-1} + B''z^{n-2} + \text{ec.} = o$, in cui preso il limite superiore f delle sue radici positive, sarà $f > z$, e però $\frac{1}{f} < \frac{1}{z} < y$, minore cioè della più picciola differenza fra le radici della proposta. Quindi potrà farsi $k = o < \frac{1}{f}$. Tutta la ricerca adunque non si riduce che al calcolo di que-

ta trasformata: Ecco che andiamo ad eseguirlo.

64. Per determinare la trasformata di cui si parla incomincio a riflettere che essendo m le radici della proposta, saranno $m(m-1)$ quelle della trasformata, poichè $m(m-1)$ sono (l. 337) le bine combinazioni di m quantità, di cui però la metà sono eguali e con segno contrario dell'altra metà; quindi dovendo essere le radici positive della trasformata eguali in numero ed in quantità alle negative, dovrà essa avere una forma tale, quanto rimanchi la stessa mettendo $-x'$ per x'; vi dovranno mancare cioè tutti i termini con potenze impari di x'; dovrà essere cioè della forma . . . . .

$x'^{m(m-1)} + A'x'^{(m-1)-2} + B'x'^{m(m-1)-4} + \text{ec.} = 0$. Facendo quindi in questa equazione . . . $y = x'^2$, $\frac{m(m-1)}{2} = n$, e riflettendo che y è sempre positivo, si avrà $(B)\ y^n - A'y^{n-1} + B'y^{n-2} \ldots \pm T' = 0$. Tutto è determinato in questa equazione fuori de' coefficienti A', B', ec. Noi l'andiamo a determinare.

83. Si offervi a tale oggetto che i coefficienti di un'equazione non ſono che combinazioni delle ſue radici: quindi i coefficienti della (*B*) non deono eſſere che una funzione di quelli della (*A*). Cerco adunqne di ſcoprire il carattere di queſte funzioni nella natura di tali coefficienti, ed oſſervo che ſe la (*A*) avrà le ſole due radici a, b, la (*B*) ne avrà le $(a-b)^2$ e ſarà $A' = a^2+b^2-2ab = 2(a^2+b^2)-(a+b)^2, B' = C' =$ ec. $= ;$ ſe eſſa ne avrà le ſole tre a,b,c, la (*B*) ne avrà le $(a-b)^2, (a-c)^2, (b-c)^2$, e ſarà

$$A' = (a-b)^2 + (a-c)^2+(b-c)^2 = 2(a^2+b^2+c^2) - 2(ab+ac+bc) = 3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2 ,$$

$$B' = (a-b)^2(a-c)^2+(a-b)^2(b-c)^2+(a-c)^2(b-c)^2$$

$$= 3(a^4+b^4+c^4) - 2(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)+ \ldots$$

$$3(a^2 b^2+a^2 c^2+b^2 c^2)$$

$C' = D' =$ ec. $= 0$.

Queſte due oſſervazioni ci baſtano, onde inſegnarci che i coefficienti della (*B*) ſono dipendenti dalle ſomme delle potenze ſimili delle ra-

dici della (*A*) Quindi paſſo a calcolare in generale le ſomme delle potenze ſimili delle radici di un' equazione per mezzo de' ſuoi coefficienti, i quali ſono nel noſtro caſo le ſole quantità conoſciute.

84. Il grado di un' equazione, e però il numero delle ſue radici è ſempre determinato: le potenze di queſte radici però che ſi vogliono ſommare può eſſerlo indeterminato: quindi io veggo che ſi poſſono incontrare due caſi, l'uno quando il grado *r* da ſommarſi delle radici è minore del grado dell' equazione, e l'altro quando ne è maggiore. Io incomincio dal primo.

85. Divido ſucceſſivamente l' equazione

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots \pm T = 0$$

di cui le radici ſuppongo che ſieno $a, b, c, \ldots t$, per $x - a, x - b, \ldots x - t$, onde averne l' equazioni

$$x^{m-1} - A_1 x^{m-2} + B_1 x^{m-3} \ldots \mp S_1 = 0$$

$$x^{m-1} - A_2 x^{m-2} + B_2 x^{m-3} \ldots \mp S_2 = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x^{m-1} - A_m x^{m-2} + B_m x^{m-3} \ldots \mp S_m = 0$$

dalla cui somma io ne ottengo l'equazione

$$mx^{m-1} - (A_1 + A_2 + \ldots A_m)x^{m-2} + \ldots$$

$$(B_1 + B_2 + \ldots B_m)x^{m-3} \ldots \mp (S_1 + S_2 + \ldots S_m) = 0$$

La doppia espressione di cui è capace questa equazione è quella che ci porta al fine proposto. In effetto ogni termine del coefficiente di x^{m-2} contiene tutte le radici meno una alternando. La somma adunque di questi termini conterrà ciascuna di queste radici $m-1$ volte, e sarà perciò $= (m-1)A$. Similmente ciascun termine del coefficiente di x^{m-3} non essendo che l'aggregato de' bini prodotti di tutte le radici meno una alternando, è chiaro che ciascun bino prodotto mancherà a giro in due solamente di essi, e perciò non vi sarà contenuto nella lor somma che $m-2$ volte; somma che sarà espressa perciò con $(m-2)B$, e così di seguito. Quindi l'una delle due indicate espressioni si è...

$$mx^{m-1} - (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} \ldots \mp S = 0$$

86. Per averne la seconda si esprima con $q, q_{r-1} \ldots q$ le somme delle diverse potenze delle radici in questione, e riflettendo che . .

$A_1 = A - a, A_2 = A - b, A_3 = A - c, \ldots A_m = A - t$

e però che $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots A_m = mA - q$;

che $B_1 = B - aA_1 = B - Aa + a^2, B_2 = B - bA_2 =$

$B - Ab + b^2, \ldots B_m = B - tA_m = B - At + t^2$,

e però $B_1 + B_2 + \ldots B_m = mB - Aq + q_2$

che $C_1 = C - aB_1 = C - aB + Aa^2 - a^3, C_2 = C - B_2$

$= C - Bb + Ab^2 - b^3, \ldots C_m = C - B_m t = C - Bt + At^2 - t3$

e però $C_1 + C_2 + \ldots C_m = mC - Bq + Aq_2 - q_3$

che così continuando si arriva a trovare . .

$S_1 + S_2 + \ldots S_m = mS - Rq + Pq_2 \ldots \pm Aq_{m-2} \mp q_{m-1}$

in cui il segno superiore ha luogo quando m è pari, e quando è impari l'inferiore. Quindi la seconda espressione cercata si è . .

$$mx^{m-1} - (mA - q)x^{m-2} + (mB - Aq + q_2)x^{m-3} - (mC - Bq + Aq_2 - q_3)x^{m-4} \ldots \mp (mS - Rq + Pq_2 \ldots \pm Aq_{m-2} \mp q_{m-1}) = 0$$

Dal paragone di queſte due eſpreſſioni io ne ottengo l' equazioni

$$(m-1)A = mA - q$$
$$(m-2)B = mB - Aq + q_2$$
$$(m-3)C = mC - Bq + Aq_2 - q_3$$
$$\vdots$$
$$(m-m+1)S = mS - Rq + Pq_2 \ldots \pm Aq_{m-2} \mp q_{m-1}$$

donde ſi deduce

$$q = A$$
$$q_2 = Aq - 2B$$
$$q_3 = Aq_2 - Bq + 3C$$
$$\vdots$$
$$q_{m-1} = Aq_{m-2} - Bq_{m-3} \pm (m-1)S \quad \&$$

Queſte formule che ci danno le ſomme cercate ſino al grado $m-1$ ci dicono che biſogna paſſare alla ricerca del ſecondo caſo, onde averle qualunque ſia il valore di r.

87. Se ſuppongo in queſto ſecondo caſo $r=m+n$, e moltiplico per x^n l'equazione propoſta, ne avrò $x^r - Ax^{r-1} + Bx^{r-2} \ldots \pm Tx^{r-m} = 0$. Se metto quindi in queſta nuova equazione ſucceſſivamente per x ciaſcuna delle radici $a, b, c, \ldots t$, ne avrò il ſeguito dell'equazioni

$$a^r - Aa^{r-1} + Ba^{r-2} \ldots \pm Ta^{r-m} = 0$$

$$b^r - Ab^{r-1} + Bb^{r-2} \ldots \pm Tb^{r-m} = 0$$

$$c^r - Ac^{r-1} + Bc^{r-2} \ldots \pm Tc^{r-m} = 0$$

$$\vdots$$

$$t^r - At^{r-1} + Bt^{r-2} \ldots \pm Tt^{r-m} = 0$$

dalla di cui ſomma ne otterrò

$$a^r + b^r + c^r \ldots + t^r - A(a^{r-1} + b^{r-1} + c^{r-1} \ldots + t^{r-1})$$
$$+ B(a^{r-2} + b^{r-2} + c^{r-2} \ldots + t^{r-2}) \ldots \pm T(a^{r-m} + b^{r-m} \ldots$$
$$+ c^{r-m} \ldots + t^{r-m}) = 0$$

cioè

$$q_r - Aq_{r-1} + Bq_{r-2} \ldots \pm Tq_{r-m} = 0$$

e quindi

$$q_r = Aq_{r-1} - Bq_{r-2} \ldots \mp Tq_{r-m}$$

Le due formule generali adunque

(D)

$$q_{m-1} = Aq_{m-2} - Bq_{m-3} \ldots \pm (m-1)S$$

$$q_{m+n} = Aq_{m+n-1} - Bq_{m+n-2} \ldots \mp Tq_n$$

ci dando ſucceſſivamente per tutti i caſi le ſomme delle potenze ſimili delle radici di una equazione, mercè la cognizione de' ſuoi coefficienti.

88. Come queſte formule ci danno le ſomme in queſtione col ſoccorſo de' coefficienti dell' equazione per cui ſi cercano, così ci danno i coefficienti di un'equazione per mezzo delle ſomme delle potenze ſimili delle ſue radici. Quindi ſe noi arriveremo a trovare le ſomme delle potenze ſimili delle radici della (B) avremo immediatamente i ſuoi coefficienti. Queſte ſomme non debbon eſſere che delle funzioni delle diverſe potenze r della radici della (A), poichè offervammo (83) che queſti coefficienti non ſono che delle funzioni di tale ſomma.

Sieno l, l_2, l_3, .. l_r le ſomme delle diverſe potenze delle radici della (B); radici le quali ſono

$(a-b)^2$, $(a-c)^2$, $(a-d)^2$, $(a-e)^2$ ec.

$(b-c)^2$, $(b-d)^2$, $(b-e)^2$ ec.

$(c-d)^2$, $(c-e)^2$, ec.

$(d-e)^2$ ec.

e di cui ſene cerca la ſomma delle potenze r^{ma} Io debbo adunque trovare il termine ſommatorio delle quantità

$(a-b)^{2r}$, $(a-c)^{2r}$, $(a-d)^{2r}$, $(a-e)^{2r}$ ec.

$(b-c)^{2r}$, $(b-d)^{2r}$, $(b-e)^{2r}$, ec.

$(e-d)^{2r}$, $(c-e)^{2r}$, ec.

$(d-e)^{2r}$, ec.

89. Per venirne a capo ſo rifletto che le potenze pari di un binomio hanno nel loro ſviluppo uu termine medio della forma $\frac{2r(2r-1)(2r-2)\ldots(r+1)}{2.3\ldots\ldots r} a^r b^r$, il cui coefficiente è il maſſimo fra tutti gli altri, e che inoltre tali potenze pari contengono tutte le poſſibili permu-

tazioni delle quantità a, b: quindi è facile rilevare che ſviluppando le quantità da ſommarſi, ſi vedrà nella lor ſomma che le quantità a^{2r}, b^{2r}, c^{2r} ec vi ſaranno contenute $m-1$ volte, cioè vi ſarà contenuto un termine della forma $(m-1)q_{2r}$; che vi ſarà inoltre contenuto il prodotto di tutte le permutazioni come $a^{2r-1}b, b^{2r-1}a$ per $2r$, quello di tutte le permutazioni come $a^{2r-2}b^2, b^{2r-2}a^2$ per $\frac{2r(2r-1)}{2}$, quello di tutte le permutazioni come $a^{2r-3}b^3, b^{2r-3}a^3$ per $\frac{2r(2r-1)(2r-2)}{2\cdot 3}$, e così ſeguitando quello finalmente di tutte le permutazioni come $a^r b^r$ per $\frac{2r(2r-1)(2r-2)\ldots(r+1)}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot r}$

39 Per trovare un' eſpreſſione, onde racchiuda tali permutazioni, che ſon delle funzioni ſimetriche delle radici di un' equazione, io oſſervo che $(a^v+b^v+c^v+\text{ec.})(a^u+b^u+c^u+\text{ec.})$ contiene nel ſuo ſviluppo tutti i prodotti come $a^v b^u$, $b^v a^u$, e tutte le potenze come... a^{v+u} b^{v+u}, ec. Quindi riſulta che

$q_v q_u = q_{v+u} + q_{v,u}$, e perciò $q_{v,u} = q_v q_u - q_{v+u}$. Facendo adunque ſucceſſivamente $u = 2r-1$, $= 2r-2, = 2r-3 = \ldots r$ ed $u = \ldots 1, = 2, = 3, = \ldots r$, ſi avrà la ſomma di tutte le permutazioni o funzioni ſimetriche come $\ldots a^{2r-1}b$, ab^{2r-1} eſpreſſa da $q_{2r-1}q - q_{2r}$, quella di tutte le permutazioni, o funzioni ſimetriche come $a^{2r-2}b^2$, $b^{2r-2}a^2$, eſpreſſa da $q_{2r-2}q - q_{2r}$ e così di ſeguito fino a quella delle permutazioni o funzioni ſimetriche come $a^r b^r$ eſpreſſa da $\frac{q_r^2 - q_{2r}}{2}$. Quindi l'unione delle quantità propoſte ſi è

$$l_r = (m-1)q_{2r} - 2r(q_{2r-1}q - q_{2r}) + \frac{2r(2r-1)}{2}(q_{2r-2}q_2 - q_{2r}) \ldots$$

$$\ldots \pm \frac{2r(2r-1)\ldots(r+1)}{2.3\ldots r.2}(q_r^2 - q_{2r}) = mq_{2r} - 2rq_{2r-1}q + \frac{2r(2r-1)}{2}q_{2r-2}q_2 \ldots \pm \frac{2r(2r-1)\ldots(r+1)}{2.3\ldots r.2}q_r^2 - (1 - 2r + \frac{2r(2r-1)}{2} \ldots \pm \frac{2r(2r-1)\ldots(r+1)}{2.3\ldots r.2})q_{2r}$$

ma offervando che il coefficiente di q_{2r} è lo

ſviluppo di $\frac{(1-1)}{2}^{2r}$, cioè $=0$, ſi avrà

$$(E)..l_r = mq_{2r} - 2rq_{2r-1}q + \frac{2r(2r-1)}{2} q_{2r-2}q_2$$

$$..\pm\frac{(2r2r-1)..(r+1)}{2.3...r.2} q_r q_r .$$ Con queſta eſpreſſione noi avremo tutto l' occorrente onde conoſcere tutta la trasformata di cui ſi tratta . Noi le faremo vedere quando verremo all' applicazione; applicazione che faremo dopo avere eſpoſto gli argomenti che la (*B*) ci porge ſulle radici eguali ed immaginarie eſiſtenti nella (*A*), e dopo averne moſtrato la maniera di ottenerle.

91 Si ſupponghi che la (*B*) ſia riſultata della forma $y^n - A'y^{n-1} + B'y^{n-2} ... \pm Ky^p = 0$, cioè della forma $(y^{n-p} - A'y^{n-p-1} + B'y^{n-p-2} ...$

$...\pm K')y^p = 0$; la prima delle quali ci dà p valori di y eguali a zero, cioè ci dà l'argomento che la (*A*) contiene $2p$ radici eguali, e la ſeconda ci darebbe ſegni, onde conoſcere il numero delle radici immaginarie, ſe avremmo il mezzo, di rilevarne quello delle radici negati-

ve di un'equazione qualunque. Infatti ſappiamo (Dalembert mem. Acad. Berl. 1746.) che le radici immaginarie di un' equazione ſon ſempre in numero pari, e che una della forma $f+g\sqrt{-1}$, dovrà ſempre avere la ſua corriſpondente $f-g\sqrt{-1}$: quindi ſe fra le radici della (A) vene ſaranno delle immaginarie $f\pm g\sqrt{-1}, f\pm g'\sqrt{-1}$, ec. i valori di x' non poſſono eſſere che della forma $a-b$, $a-f\mp g\sqrt{-1}$, $f-f'\pm(g-g')\sqrt{-1}$, $2g\sqrt{-1}$, e però quei di $y=x'^2$ non poſſono avere che la forma . . . . . .

$(a-b)^2, (a-f\mp g\sqrt{-1})^2, (f-f'\pm(g-g')\sqrt{-1})^2$ $(2g\sqrt{-1})^2$ cioè reali poſitivi, immaginarj e reali negativi. Si oſſervi però che ogni coppia di radici immaginarie eſiſtenti nella (A) dà neceſſariamente per un valore $=(2g\sqrt{-1})^2=-4g^2$ cioè dà una radice reale negativa nella (B), e che tutte le radici negative della (B) non poſſono provenire che dalle coppie delle immaginarie della (A): quindi conoſcendo quante radici negative ſi contengono nella (B), noi cono-

ſceremo quante coppie di radici immaginarie eſiſtono nella (*A*).

92. L'Analiſi però non ci ſuggeriſce delle regole generali, e ſicure, onde venire a queſta cognizione. Il teorema di Carteſio generalizzato e dimoſtrato da Degua (Mem. Acad. 1741), cioè *che ogni equazione in generale non può avere un numero di radici poſitive maggiore di quello delle variazioni di ſegno, nè un numero di radici negative maggiore della ſucceſſione dello ſteſſo ſegno*, ovvero, *ogni equazione di cui le radici ſono reali ha preciſamente tante radici poſitive quante variazioni, e tante negative quante ſucceſſioni dello ſteſſo ſegno*; queſto teorema io dico che è la regola più general- da noi conoſciuta, altra cognizione non ci ſomminiſtra applicandolo alla (*B*) che quella dell' eſiſtenza o non eſiſtenza dell e radici immaginarie nella (*A*) e quella di un limite ſul numero delle loro coppie: quindi per mezzo della (*B*) poſſiamo avere l' argomento ſe la (*A*) contiene delle radici immaginarie, ma non poſſiamo ſaperne il numero. Il metodo però di cui ſiamo in dettaglio, ci dà il compenſo, onde arrivare in una maniera indiretta a quanto non

ci porta direttamente. Infatti se con esso troviamo le radici eguali ed ineguali dell'equazione avremo nella differenza trai numero di esse, ed il grado dell'equazione il numero delle radici immaginarie. Dopo avere sottomesso a qualche esame l'equazione (*B*) noi vedremo come da essa sene ottengono le radici eguali, ineguali, e però immaginarie.

§ 3. Per avere le radici eguali di un'equazione abbiamo bisogno di un teorema, che unitamente a tanti altri indispensabili mancano nelle lezioni. Ecco che andiamo a dimostrarlo.

Se dividiamo i termini di un'equazione

(*A*).. $x^m \mp Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \mp Cx^{m-3} \ldots \mp St \pm T = 0$ per x, e li moltiplichiamo nel tempo stesso pel suo esponente, ne avremo un'altra . . .

(*B*).. $mx^{m-1} \mp (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} + (m-3)Cx^{m-4} \ldots \mp S = 0$, le di cui radici avranno per limiti quelle della proposta (*A*).

In effetto sieno *a*, *b*, *c*, ec. le radici della (*A*) disposte ad ordine di grandezza, sia cioè $a > b$, $b > c$, $c > d$, ec. ed avremo . . .

$(A) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ ec. Inoltre ſi faccia nella propoſta (A) ſucceſſivamente $x = x+a = x+b = x+c =$ ec. ed è chiaro che ne avremo delle trasformate (A_1), (A_2), (A_3) ec. le di cui radici eſſendo riſpettivamente $a-a$, $b-a$, $c-a$, ec.... $a-b$, $b-b$, $c-b$, ec... $a-c$, $b-c$, $c-c$, ec...ec. ci moſtrano che manca in tutte il termine noto, quindi è facile il vedere, che i riſpettivi ultimi termini di queſte trasformate ſono

(B_2).. $ma^{m-1} - (m-1)Aa^{m-2} + (m-2)Ba^{m-3}$ ec. $= \pm(b-a)(c-a)$ ....

(B_3).. $mb^{m-1} - (m-1)Ab^{m-2} + (m-2)Bb^{m-3}$ ec. $= \pm(a-b)(c-b)$ ....

(B_4) ....$mc^{m-1} - (m-1)Ac^{m-2} + (m-2)Bc^{m-3}$ ec. $= \pm(a-c)(b-c)$ ....

ec. ec. ec.

i quali, come chiaramente ſi vede, ſono con ſegni alternativi. Offervo frattanto che mettendo ſucceſſivamente nella (A_1) $a, b, c,$ ec. a luogo di x, avremo i riſultati (B_2), (B_3), (B_4) ec. avremo cioè de' riſultati con ſegni contrarj: donde conchiudo che le radici $m-1$ della (B_1) ſo-

no fra le m della propoſta, cioè fra le a, b, c, ec. Applicando quindi queſto teorema al caſo noſtro ne riſulta che ſe la (A) avrà p radici $= a, q$ radici $= b$, r radici $= c$, ec. la (B) conterrà $p-1$, $q-1, r-1$, ec. radici $= a, b, c$, ec. cioè ſe la $(A) = (X).(x-a)^p(x-b)^q(x-c)^r$ ec. ſarà la $(B) = (X').(x-a)^{p-1}(x-b)^{q-1}$ ec., cioè le (A), (B) avranno un comun diviſore $(R) = (x-a)^{p-1}(x-b)^{q-1}$ ec.

Quindi $\frac{(A)}{(R)} = (X).(x-a)(x-b)(x-c$ ec $= (K)$, cioè dividendo la propoſta pel maſſimo commun diviſore che eſſa ha colla (B) ſene avrà la (K) che contiene tutte le ſue radici, colla differenza ſoltanto che le multiple ſono in eſſa divenute ſemplici: quindi (B), (K) hanno il maſſimo commun diviſore $(R') = (x-a)(x-b)(x-c)$ ec. quindi $\frac{(K)}{(R')} = (X)$: quindi finalmente, raccogliendo, col dividere per x la propoſta (A), e col moltiplicarne i termini pe' riſpettivi eſponenti; col prendere tra la riſultante (B) e la propoſta (A) il maſſimo commun diviſore (R);

col dividere la propoſta (*A*) per queſto commun diviſore (*R*); col prendere tra queſto quoziente (*K*) e la (B) il maſſimo commun diviſore (*R'*); col dividere infine il quoziente (*K*) per queſto diviſore (*R'*), ne avremo le due equazioni (*X*), (*R'*) la prima delle quali, contenendo tutte le radici diſuguali, e la ſeconda tutte le uguali preſe una volta, ſi potranno trattare col metodo dell' equazioni con radici tutte ineguali. Il metodo adunque per avere le radici uguali di un' equazione non conſiſte che nella riduzione a quello per averne le ineguali. Le radici ineguali poſitive di un' equazione ſi hanno col mettervi ſucceſſivamente per x i termini della ſerie 0, k, 2k,...nk; e le negative col ſoſtituire $-x$ ad x, e quindi nuovamente 0, k, 2k,...nk per x.

94. L'equazione propoſta può contenere ancora delle radici immaginarie. Noi non abbiamo de' metodi a priori che per ſolo conoſcerne l' eſiſtenza. Il loro numero non ſi determina che a poſteriori, come abbiamo veduto: quindi l' ultima ſoſtituzione nk che dà l' ultima radice ci potrebbe eſſere ignota, ſe non avremmo de' mezzi onde venirne a cognizione. L' uno di tali

mezzi si è quello di vedere nella serie dell'equazione dopo la sostituzione di nk per x, se i termini vanno all'infinito senza dare alcun zero, o alcun cambiamento di segno. Questo progresso infinito si rileva allorchè prendendo sino alle costanti le differenze, e scrivendole l'una sotto dell'altra, daranno le linee verticali collo stesso segno. Noi ne vedremo la ragione, allorchè verremo all'applicazione.

95. Un secondo mezzo sarebbe quello di paragonare nk col limite f delle radici positive, poichè dee esserne sempre minore. Abbiamo avuto bisogno (8.) di questo limite per la determinazione di k, ma non abbiamo insegnato come trovarlo. Per nulla lasciare senza dimostrazione non ci resta che determinare il limite delle radici positive di un'equazione. La teoria delle trasformazioni cene suggerisce la pronta maniera onde soddisfarvi. I fatti sia

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots T = 0$$

un'equazione qualunque, in cui fatta $x = h + y$ cene dà la trasformata in ordine alle potenze di y incominciando dal zero

$$h^m + Ah^{m-1} + Bh^{m-2} + Ch^{m-3} + \ldots T$$

$$+ y(mh^{m-1} + (m-1)Ah^{m-2} + (m-2)Bh^{m-3} \ldots)$$

$$+ y^2\left(\frac{m(m-1)}{2}h^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2}Ah^{m-3} \ldots\right)$$

$$+ y^3\left(\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}h^{m-3} + \ldots\right)$$

$$+ \text{ec.}$$

$$= 0$$

ovvero fatto

(M)

$$A_1 = h^m + Ah^{m-1} + Bh^{m-2} + \ldots T$$

$$B_1 = mh^{m-1} + (m-1)Ah^{m-2} + \ldots S$$

$$C_1 = \frac{m(m-1)}{2}h^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2}Ah^{m-3} + \ldots R$$

ec. ec.

si avrà la trasformata

$A_1 + B_1 y + C_1 y^2 + \text{ec.} = 0$, in cui fatto $h = n+1$, ci dà

$$A_1 = (n+1)^m + A(n+1)^{m-1} + B(n+1)^{m-2} + \ldots T$$

$$B_1 = m(n+1)^{m-1} + (m-1)A(n+1)^{m-2}$$

$$+ (m-2)B(n+1)^{m-3} + \ldots S$$

$$C = \frac{m(m-1)}{2}(n+1)^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} A(n+1)^{m-3}$$

$$+ \frac{(m-2)(m-3)}{2} B(n+1)^{m-4} + \ldots R$$

ec. ec. ec.

96. Incominciò ad offervare che

(N)

$$(n+1)^2 = 1 + n(n+1) + n$$

$$(n+1)^3 = n(n+1)^2 + (n+1)^2 = 1 + n(n+1)^2$$

$$+ n(n+1) + n$$

$$(n+1)^4 = n(n+1)^3 + (n+1)^3 = 1 + n(n+1)^3$$

$$+ n(n+1)^2 + n(n+1) + n$$

. . . . . .

$$(n+1)^m = 1 + n(n+1)^{m-1} + n(n+1)^{m-2} + \ldots n$$

epperò

$$A1 = 1 + n(n+1)^{m-1} + n(n+1)^{m-2} + \ldots n$$

$$+ A(n+1)^{m-1} + B(n+1)^{m-2} + \ldots T$$

$$B1 = m(1 + n(n+1)^{m-1} + n(n+1)^{m-2} + \ldots n)$$

$$+ (m-1)A(n+1)^{m-2} + \ldots S'$$

ec. ec.

Paſſo avanti ed oſſervo che eſſendo n una quantità poſitiva tutti i termini delle formule (N) ſaranno poſitivi tanto ſe m è pari che impari, e che eſſendo nel tempo medeſimo n una quantità maggiore di quei tra i coefficienti A, B, C,... T, che ſono negativi, oppure eguale al più grande di eſſi, ſaranno poſitivi in tutti i caſi i valori di A_1, B_1, ec. locchè ci moſtra che le radici reali della trasformata

$$A_1+B_1y+C_1y^2+\text{ec.}=0$$

ſon tutte negative: quindi dall' equazione di poſizione $x=y+n+1$ ſi ha ſempre $n+1>x$, e ciò per eſſer y negativa ed x poſitiva. Il limite adunque delle radici poſitive di un' equazione ſi ottiene coll' aumentare di 1 il ſuo maſſimo coefficiente negativo preſo poſitivamente.

97. Il limite trovato con queſto metodo non è il più proſſimo che può darſi. La ſola eſpoſizione del metodo per cui vi abbiamo arrivato è baſtante onde convincercene. Paſſiamo perciò ad avvertire il tentativo che può adoprarſi per aver queſto più proſſimo limite. In effetto ſe noi mettiamo per h nelle formule (M) ſucceſſi-

vamente $f-1, f-2, f-3$, ec. fintanto che danno de' risultati simultaneamente positivi, avremo nell'ultimo di essi il più prossimo limite cercato delle radici positive dell'equazione proposta.

98. Colla dimostrazione di quest' ultimo teorema resta compita per tutte le parti quella teoria che sul principio prommise. Altro non ci resta adunque che eseguirne l'applicazione.

Mi sembra opportuno l'avvertire che io disporrò in una tavola l'applicazione di cui si tratta, onde tenerne sott' occhi tutte le parti.

TAV. DI APPLICAZIONE.

Equ. enunc. $x^4+x^3-2x^2-18x-28=0$

Coeff. della (A)

$A=-7, B=-2, C=18, D=-28$

Esp. delle $(A), (B)$, $m=4$, $n=\frac{m(m-1)}{2}=6$

Valori di q_r cavati dalle (D)

$q = A = -$ 7

$q_2 = Aq - 2B =$ 53

$q_3 = Aq_2 - Bq + 3C = -$ 331

$q_4 = Aq_3 - Bq_2 + Cq - 4D =$ 2429

$q_5 = Aq_4 - Bq_3 + Cq_2 - Dq =$ 16767

$q_6 = Aq_5 - Bq_4 + Cq_3 - Dq_2 =$ 117713

$q_7 = Aq_6 - Bq_5 + Cq_4 - Dq_3 = -$ 823431

$q_8 = Aq_7 - Bq_6 + Cq_5 - Dq_4 =$ 5765089

$q_9 = Aq_8 - Bq_7 + Cq_6 - Dq_5 =$ 40353127

$q_{10} = Aq_9 - Bq_8 + Cq_7 - Dq_6 =$ 282476273

$q_{11} = Aq_{10} - Bq_9 + Cq_8 - Dq_7 =$ 1977324638

$q_{12} = Aq_{11} - Bq_{10} + Cq_9 - Dq_8 =$ 13841291169

Valori di l_r cavati dalla (E)

$l = mq_2 - qq =$ 163

$l_2 = mq_4 - 4qq_3 + 3q_2q_2 =$ 8795

$l_3 = mq_6 - 6qq_5 + 15q_2q_4 - 10q_3q_3 =$ 586183

$l_4 = mq_8 - 8qq_7 + 28q_2q_6 - 56q_3q_5 =$ 43956035
$+ 35q_4q_4$

$l_5 = mq_{10} - 10q_9q + 45q_8q_2 - 120q_3q_7 =$ 3475405303
$+ 120q_4q_6 - 158q_5q_5$

$l_6 = mq_{12} - 12q_{11}q + 66q_{10}q_2 =$ 280377943475
$- 220q_9q_3 + 495q_8q_4$
$- 792q_7q_5 + 462q_6q_6$

Valori di A', B', ec. dedotti dalle (D)

$A' = l =$ 163

$B' = \frac{1}{2}(A'l - l_2) =$ 8867

$C' = \frac{1}{3}(B'l - A'l_2 + l_3) =$ 200393

$D = \frac{1}{4}(C'l - B'l_2 + A'l_3 - l_4) =$ 1523672

$E' = \frac{1}{5}(D'l - C'l_2 + B'l_3 - A'l_4 + l_5) =$ 1176404

$F' = \frac{1}{6}(E'l - D'l_2 + C'l_3 - B'l_4 + A'l_5 - l_6) = -$ 44355600

Trasformata $(B)\ldots y^6 - 163y^5 + 8887y^4 - 200393y^3 + 1523672y^2 - 1176404y - 44355600 = 0$

Trasformata $(C)\ldots z^6 + \frac{1176404z^5}{44355600} - \frac{1523672z^4}{44355600} + \frac{200393z^3}{44355600} - \frac{8887z^2}{44355600} + \frac{163z}{44355600} - \frac{1}{44355600} = 0$

Suo lim. $f = 1,0343$; suo lim. più prossimo di f dato dalle form. $(M)_1 = 1\ldots$ Quindi $1 < x' < k = 1$.

Serie de'val. di x	...0,	1,	2,	3,	4,	ec.
dell'equaz. ...	−28,	−40,	0,	+170,	+572,	ec.
delle dif.pr...	−10,	−12,	+40,	+170,	+402,	ec.
delle dif.fec...	−32,	−2,	+52	+130,	+232,	ec.
delle dif.ter. ..	+6,	+30,	+54,	+78,	+102,	ec.
delle dif.coſt. ..	+24,	+24,	+24,	+24,	+24,	ec.

Ser.de'v.di $-\bar{x}.\bar{m}$	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,ec.
dell'equaz...	−28,	−18,	−40,	−100,	−180,	−238,	−208,	0,	+500,	+1430,ec.
delle dif.pr..	+12,	+10,	−22,	−60,	−80,	−58,	+30,	+208,	+500,	+930,ec.
delle dif.sec.	+52,	−2,	−32,	−38,	−20,	+22,	+88,	+178,	+292,	+430,ec.
delle dif.ter.	−78,	−54,	−30,	−6,	+18,	+42,	+66,	+90,	+114,	+138,ec.
delle dif.cost.	+24,	+24,	+24,	+24,	+24,	+24,	+24,	+24,	+24,	+24, ec.

99. Io veggo nell'ultima parte di questa tavola che le serie dell'equazione contengono due termini $=0$, l'uno corrispondente ad $x=2$, e l'altro a $-x=7$. Veggo inoltre che le colonne verticali formate dalle differenze successive delle serie dell'equazione, prese a destra del zero hanno tutti i loro termini collo stesso segno. La prima di queste due osservazioni mi dà dunque 2, e -7 per radici razionali dell'equazione proposta, e la seconda mostrandomi che i termini della serie dell'equazione andranno collo stesso segno all'infinito sempre più crescendo (poichè ciascuno di essi è sempre formato del precedente più il suo corrispondente disotto, come per esempio $-40=-28-12$, $170=0+170$, $500=0+500$, ec.) mi assicura che il più delle radici sono immaginarie. Quindi l'equazione proposta avrà due radici immaginarie. La trasformata *(B)* avendo una sola permanenza di segno, e perciò non potendo avere più di una radice positiva, ci avea diggià indicato che la proposta non potea contenere più di questo numero di radici immaginarie.

$$h^m + Ah^{m-1} + Bh^{m-2} + Ch^{m-3} + \ldots T$$

$$+ y(mh^{m-1} + (m-1)Ah^{m-2} + (m-2)Bh^{m-3} \ldots)$$

$$+ y^2\left(\frac{m(m-1)}{2} h^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} Ah^{m-3} \ldots\right)$$

$$+ y^3\left(\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} h^{m-3} + \ldots\right)$$

$$+ \text{ec.}$$

$$= 0$$

ovvero fatto

(M)

$$A_1 = h^m + Ah^{m-1} + Bh^{m-2} + \ldots T$$

$$B_1 = mh^{m-1} + (m-1)Ah^{m-2} + \ldots S$$

$$C_1 = \frac{m(m-1)}{2} h^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} Ah^{m-3} + \ldots R$$

ec. ec.

si avrà la trasformata

$A_1 + B_1 y + C_1 y^2 + \text{ec.} = c$, in cui fatto $h = n+1$, ci dà

$$A_1 = (n+1)^m + A(n+1)^{m-1} + B(n+1)^{m-2} + \ldots T$$

$$B_1 = m(n+1)^{m-1} + (m-1)A(n+1)^{m-2}$$

$$+ (m-2)B(n+1)^{m-3} + \ldots S$$

$$C = \frac{m(m-1)}{2}(n+1)^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} A(n+1)^{m-3}$$

$$+ \frac{(m-2)(m-3)}{2} B(n+1)^{m-4} + \ldots R$$

ec. ec. ec.

96. Incominciò ad osservare che

(N)

$$(n+1)^2 = 1 + n(n+1) + n$$

$$(n+1)^3 = n(n+1)^2 + (n+1)^2 = 1 + n(n+1)^2 + n(n+1) + n$$

$$(n+1)^4 = n(n+1)^3 + (n+1)^3 = 1 + n(n+1)^3 + n(n+1)^2 + n(n+1) + n$$

. . . . . .

$$(n+1)^m = 1 + n(n+1)^{m-1} + n(n+1)^{m-2} + \ldots n$$

epperò

$$A1 = 1 + n(n+1)^{m-1} + n(n+1)^{m-2} + \ldots n$$

$$+ A(n+1)^{m-1} + B(n+1)^{m-2} + \ldots T$$

$$B1 = m\left(1 + n(n+1)^{m-1} + n(n+1)^{m-2} + \ldots n\right)$$

$$+ (m-1)A(n+1)^{m-2} + \ldots S'$$

ec. ec.

Paſſo avanti ed oſſervo che eſſendo n una quantità poſitiva tutti i termini delle formule (N) ſaranno poſitivi tanto ſe m è pari che impari, e che eſſendo nel tempo medeſimo n una quantità maggiore di quei tra i coefficienti A, B, C,... T, che ſono negativi, oppure eguale al più grande di eſſi, ſaranno poſitivi in tutti i caſi i valori di A_1, B_1, ec. locchè ci moſtra che le radici reali della trasformata

$$A_1+B_1y+C_1y^2+\text{ec.}=0$$

ſon tutte negative: quindi dall' equazione di poſizione $x=y+n+1$ ſi ha ſempre $n+1>x$, e ciò per eſſer y negativa ed x poſitiva. Il limite adunque delle radici poſitive di un' equazione ſi ottiene coll' aumentare di 1 il ſuo maſſimo coefficiente negativo preſo poſitivamente.

97. Il limite trovato con queſto metodo non è il più proſſimo che può darſi. La ſola eſpoſizione del metodo per cui vi abbiamo arrivato è baſtante onde convincercene. Paſſiamo perciò ad avvertire il tentativo che può adoprarſi per aver queſto più proſſimo limite. In effetto ſe noi mettiamo per h nelle formule (M) ſucceſſi-

vamente $f-1, f-2, f-3$, ec. fintanto che danno de' risultati simultaneamente positivi, avremo nell'ultimo di essi il più prossimo limite cercato delle radici positive dell'equazione proposta.

98. Colla dimostrazione di quest' ultimo teorema resta compita per tutte le parti quella teoria che sul principio prommise. Altro non ci resta adunque che eseguirne l'applicazione.

Mi sembra opportuno l'avvertire che io disporrò in una tavola l'applicazione di cui si tratta, onde tenerne sott' occhi tutte le parti.

TAV. DI APPLICAZIONE.

Equ. enunc. $x^4+3x^3-2x^2-18x-28=0$

Coeff. della (A)

$A=-7, B=-2, C=18, D=-28$

Esp. delle $(A), (B)$, $m=4$, $n=\frac{m(m-1)}{2}=6$

Valori di q_r cavati dalle (D)

$q = A = -$ 7

$q_2 = Aq - 2B =$ 53

$q_3 = Aq_2 - Bq + 3C = -$ 331

$q_4 = Aq_3 - Bq_2 + Cq - 4D =$ 2429

$q_5 = Aq_4 - Bq_3 + Cq_2 - Dq =$ 16767

$q_6 = Aq_5 - Bq_4 + Cq_3 - Dq_2 =$ 117713

$q_7 = Aq_6 - Bq_5 + Cq_4 - Dq_3 = -$ 823431

$q_8 = Aq_7 - Bq_6 + Cq_5 - Dq_4 =$ 5765089

$q_9 = Aq_8 - Bq_7 + Cq_6 - Dq_5 =$ 40353127

$q_{10} = Aq_9 - Bq_8 + Cq_7 - Dq_6 =$ 282476273

$q_{11} = Aq_{10} - Bq_9 + Cq_8 - Dq_7 =$ 1977324638

$q_{12} = Aq_{11} - Bq_{10} + Cq_9 - Dq_8 =$ 13841291169

Valori di l_r cavati dalla (E)

$l = mq_2 - qq =$ 163

$l_2 = mq_4 - 4qq_3 + 3q_2q_2 =$ 8795

$l_3 = mq_6 - 6qq_5 + 15q_2q_4 - 10q_3q_3 =$ 586183

$l_4 = mq_8 - 8qq_7 + 28q_2q_6 - 56q_3q_5 =$ 43956035
$+ 35q_4q_4$

$l_5 = mq_{10} - 10q_9q + 45q_8q_2 - 120q_3q_7 =$ 3475405303
$+ 120q_4q_6 - 158q_5q_5$

$l_6 = mq_{12} - 12q_{11}q + 66q_{10}q_2 =$ 280377943475
$- 220q_9q_3 + 495q_8q_4$
$- 792q_7q_5 + 462q_6q_6$

Valori di A', B', ec. dedotti dalle (D)

$A' = l =$ 163

$B' = \frac{1}{2}(A'l - l_2) =$ 8817

$C' = \frac{1}{3}(B'l - A'l_2 + l_3) =$ 200393

$$D' = \frac{1}{4}(C'l - B'l_2 + A'l_3 - l_4) = 1523672$$

$$E' = \frac{1}{5}(D'l - C'l_2 + B'l_3 - A'l_4 + l_5) = 1176404$$

$$F' = \frac{1}{6}(E'l - D'l_2 + C'l_3 - B'l_4 + A'l_5 - l_6) = -44355600$$

Trasformata $(B)\ldots y^6 - 163y^5 + 8887y^4 - 200393y^3 + 1523672y^2 - 1176404y - 44355600 = 0$

Trasformata $(C)\ldots z^6 + \frac{1176404z^5}{44355600} - \frac{1523672z^4}{44355600} + \frac{200393z^3}{44355600} - \frac{8887z^2}{44355600} + \frac{163z}{44355600} - \frac{1}{44355600} = 0$

Suo lim. $f = 1,0343$; suo lim. più prossimo di f dato dalle form. $(M)_1 = 1\ldots$ Quindi $1 < x' < k = 1$.

Serie de'val. di x	...0,	1,	2,	3,	4,	ec.
dell'equaz. ...	−28,	−40,	0,	+170,	+572,	ec.
delle dif.pr...	−10,	−12,	+40,	+170,	+402,	ec.
delle dif.ſec...	−32,	−2,	+52	+130,	+232,	ec.
delle dif.ter. ..	+6,	+30,	+54,	+78,	+102,	ec.
delle dif.coſt. ..	+24,	+24,	+24,	+24,	+24,	ec.

Ser.de'v.di $-x$ =	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,ec.
dell'equaz...	−28,	−18,	−40,	−100,	−180,	−238,	−208,	0,	+500,	+1430,ec.
delle dif.pr..	+12,	+10,	−22,	−60,	−80,	−58,	+30,	+208,	+500,	+930,ec.
delle dif.sec.	+52,	−2,	−32,	−38,	−20,	+22,	+88,	+178,	+292,	+430,ec.
delle dif.ter.	−78,	−54,	−30,	−6,	+18,	+42,	+66,	+90,	+114,	+138,ec.
delle dif.cost.	+24,	+24,	+24,	+24,	+24,	+24,	+24,	+24,	+24,	+24, ec.

99. Io veggo nell'ultima parte di queſta tavola che le ſerie dell' equazione contengono due termini $=0$, l' uno corriſpondente ad $x=2$, e l' altro a $-x=7$. Veggo inoltre che le colonne verticali formate dalle differenze ſucceſſive delle ſerie dell' equazione, preſe a deſtra del zero hanno tutti i loro termini collo ſteſſo ſegno. La prima di queſte due oſſervazioni mi dà dunque 2, e -7 per radici razionali dell' equazione propoſta, e la ſeconda moſtrandomi che i termini della ſerie dell' equazione andranno collo ſteſſo ſegno all' infinito ſempre più creſcendo (poichè ciaſcuno di eſſi è ſempre formato del precedente più il ſuo corriſpondente diſotto, come per eſempio $-40=-28-12$, $170=0+170$, $500=0+500$, ec.) mi aſſicura che il più delle radici ſono immaginarie. Quindi l' equazione propoſta avrà due radici immaginarie. La trasformata *(B)* avendo una ſola permanenza di ſegno, e perciò non potendo avere più di una radice negativa, ci avea diggià indicato che la propoſta non potea contenere più di queſto numero di radici immaginarie.

Quindi conchiudo che fra queſte quattro radici il +2 è quella che corriſponde alle condizioni propoſte nel noſtro problema, dicendoci che 200 erano i ſoldati chiuſi nella piazza.

100. Il numero (162) ci chiama alla ricerca de' limiti delle radici delle equazione $x^3 - 13x + 5 = 0$ Vengo perciò a trovarli col metodo, che noi veniamo di eſporre, onde darne una ſeconda applicazione, e preparare nel tempo ſteſſo un materiale per la ſoluzione del problema ivi propoſto.

Equ. propoſta $x^3 - 13x + 5 = 0$

Coeff. della (A).... $A = 0$, $B = -13$, $C = -5$

Valori di q_r cav. dalla (D)

$q = A =$	0
$q_2 = -2B =$	26
$q_3 = 3C = -$	15
$q_4 = -Bq_2 =$	338
$q_5 = -Bq_3 + Cq_2 = -$	325
$q_6 = -Bq_4 + Cq_3 =$	4469

Valori di l_r cavati dalla (E); e di $A', B',$ ec. dalla (D)

$l = 39_2 =$ 78

$l_2 = 39_4 + 39_2 q_2 =$ 3042

$l_3 = 39_6 + 15 q_2 q_4 - 10 q_3 q_3 =$ 142977

$A' = l =$ 78

$B' = \frac{1}{2}(A'l - l_2) =$ 1521

$C' = \frac{1}{3}(B'l - A'l_2 + l_3) =$ 8113

Trasf. $(B) \ldots y^3 - 78y^2 + 1521y - 8113 = 0$

Trasf. $(C) \ldots z^3 - \frac{1521z^2}{8113} + \frac{78z}{8113} - \frac{1}{8113} = 0$

lim. f di $(C) = 1,1875$ .. limite più proffimo di f dato dalle form. $(M), = 1 \ldots$ ed $1 < x', k = 1$.

Ser. de' val. di $x \ldots$ 0, 1, 2, 3, 4, ec.
dell' equ. $\ldots +5, -7, -13, -7, +17,$ ec.

Ser. de' val. di $-x \ldots$ 0, 1, 2, 3, 4, ec.
dell' equ. $\ldots +5, +17, +23, +17, -7,$ ec.

Non và duopo di aggiungervi le ſerie ſucceſſive delle differenze, poichè i tre cambiamenti di ſegno ci danno prontamente tutte tre le radici dell' equazione propoſta. Senza eſtendere di vantaggio queſta tavola conchiudo che l' equazione di cui ſi tratta ha due radici poſitive, ed una negativa e che i limiti cercati ſono

$0, -3, +3$

101. Il calcolo di queſte tavole ci moſtra con abbaſtanza chiarezza quanto laborioſo e difficile ſia la pratica del metodo eſpoſto. Lagrange vedendo la neceſſità indiſpenſabile di determinare il valore della minima differenza delle radici dell' equazione propoſta, onde fiſſarne quello di k; riflettendo che il calcolo della trasformata (*B*), da cui quella determinazione dipende, diviene ſempre più lungo come il grado dell'equazione s' innalza; oſſervando infine che un tal metodo rieſce quaſi impraticabile quando queſto grado è alquanto elevato, ha eſpoſto degli altri mezzi più facili e pronti onde arrivare a quella inevitabile cognizione: quindi per dare un compimento a queſto ſaggio ſulla ſoluzione numerica dell' equazioni, io vado a dettagliare al più

che posso in ristretto un di quegl' ingegnosi artificj immaginati da quel sommo ed immortale geometra che forma il soggetto della seconda parte.

102. II. Sia (81) $(A)...x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3}$ + ec. $= o$ l'equazione proposta: se mettiamo in essa per x ciascuna delle m quantità $a, b, c, \ldots t$, è chiaro che ne avremo m equazioni particolari in a, in b, in $c, \ldots$ in t: e se in ciascuna di quest' equazioni faremo rispettivamente $a = x + y_1$, $b = x + y_2$, $c = x + y_3, \ldots t = y + z_m$ è chiaro egualmente che ne avremo m trasformate le quali sono tutte comprese nell' equazion generale.

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + Dx^{m-4} \text{ ec.}$$

$$+ y_m(mx^{m-1} - (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3}$$

$$- (m-3)Cx^{m-4} \text{ ec.})$$

$$+ \frac{1}{2} y_m^2(m(m-1)x^{m-2} - (m-1)(m-2)Ax^{m-3}$$

$$+ (m-2)(m-3)Bx^{m-4} \text{ ec.})$$

$$+ \frac{1}{2.3} y_m^3(m(m-1)(m-2)x^{m-3}$$

$$- (m-1)(m-2)(m-3)Ax^{m-4} \text{ ec.})$$

$$+ \text{ ec.}$$

$$= 0$$

ovvero per eſſerne il primo termine la ſteſſa equazione propoſta, e perciò =o

$$(mx^{m-1} - (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} - (m-3)Cx^{m-4} \text{ ec.})$$
$$+ \frac{1}{2}y_m\, m(m-1)x^{m-2} - (m-1)(m-2)Ax^{m-3} + (m-2)(m-3)Bx^{m-4} \text{ ec.})$$
$$+ \frac{1}{2\cdot 3}y_m^2(m(m-1)(m-2)x^{m-3} - (m-1)(m-2)(m-3)Ax^{m-4} \text{ ec.})$$
$$+ \text{ec.}$$
$$= o$$

Fatto qnindi

$$A' = mx^{m-1} - (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} - (m-3)Cx^{m-4} \text{ ec.}$$
$$B' = \frac{1}{2}(m(m-1)x^{m-2} - (m-1)(m-2)Ax^{m-3} + (m-2)(m-3)Bx^{m-4} \text{ ec})$$

$$C' = \frac{1}{2.3}\left(m(m-1)(m-2)x^{m-3}\right.$$

$$\left.-(m-1)(m-2)(m-3)Ax^{m-4}+\text{ec.}\right)$$

ec. ec.

ſene avrà

$$(B)\ldots A'+B'y_m+C'y_m^2 \text{ ec.} = o$$

103. Se ſi ſupponghi che le quantità $a,b,c,\ldots t$ ſieno le radici dell' equazione propoſta, allora quelle di queſta trasformata ſaranno ...

$y_1(=x-a) = a-a = b-a = c-a = d-a = \ldots t-a$

$y_2(=x-b) = a-b = b-b = c-b = d-b = \ldots t-b$

$y_3(=x-c) = a-c = b-c = c-c = d-c = \ldots t-c$

. . . . . .

$y_m(=x-t) = a-t = b-t = c-t = d-t = \ldots t-t$

cioè le ttasformate compreſe nell'equazione (B) avranno per radici tutte le bine combinazioni differenze di quelle della propoſta. ciaſcuna delle quali ha la ſua eguale in quantità, ma con egno contrario. Conoſcendo quindi queſte trasformate noi conoſceremo ancora la minima di tali differenze, e perciò facendo k eguale o più picciolo di eſſa, avremo ciocchè ſi cercava.

104. In un caso più complicato di quello di sopra ci troveremo se per fissare il valore di k noi dovremo calcolare e conoscere singolarmente tutte queste radici; poichè mediante il ripiego notato (81) noi abbiamo ivi evitato tal conoscenza e cene è solo bastata quella del loro complesso, quella cioè della trasformata (*B*) che tutte le abbraccia e comprende. Il ripiego che ci ha sopra risparmiato la cognizione singola di queste radici è quell' istesso che cene può ancora risparmiare quella della trasformata (*B*).

Infatti se in questa trasformata facciamo $y_m = \frac{1}{z}$, noi ne avremo la (*C*)... $z^{m-1} + \frac{B'}{A'} z^{m-2} + \frac{C'}{A'} z^{m-3} + \ldots \frac{1}{A'} = 0$, di cui bisognerebbe prendere il limite superiore delle sue radici positive onde fissare con esso il valore di k giusta il numero citato. Quindi tutto il ripiego di cui ivi si tratta consiste nella ricerca di questo limite: ma noi sappiamo che esso altro non è che il massimo coefficiente negativo preso positivamente ed aumentato dell'unità, o pure un nu-

mero maggiore di esso: le ricerca adunque di questo limite si riduce in fondo a trovare in generale fra i coefficienti $\frac{B'}{A'}, \frac{C'}{A'}, \ldots \frac{1}{A'}$ il massimo negativo, o un numero più grande di esso: ecco come abbiamo cambiato veduta a quel ripiego; ed ecco dietro a quali riflessioni andiamo a servircene onde fissare il valor di k senza una conoscenza positiva di questi coefficienti.

105. I coefficienti di cui sene dee trovare il massimo negativo, o un numero più grande di esso, sono delle funzioni fratte di x. Se fossero intere noi avremmo un mezzo facile e pronto onde ottener questo numero. In effetto questi coefficienti possono risultare negativi o positivi allorchè per x visi mette alcuno de' suoi valori. Quindi se chiamiamo M l'aggregato de' termini positivi e N' quello de' negativi di questi coefficienti, e prendendo i limiti superiore ed inferiore de' valori positivi di x, ne mettiamo il primo per x in N, ed il secondo per x in M, è chiaro che ne' coefficienti della prima specie dovrà aversi un risultato maggiore di quello che si avrebbe mettendo per x in M, N qualunque

de' ſuoi valori poſitivi: prendendo il più grande de' riſultati che tale ſoſtituzione ci dà per queſti coefficienti della prima ſpecie, noi avremo il numero cercato per la parte de' valori poſitivi di x. Quindi ſe noi conoſceremo quali fra tutti i coefficienti in queſtione ſono i negativi, avremmo con queſto mezzo riſpoſto intieramente per queſta parte alla propoſta domanda. Ma noi ſupponiamo non conoſciuti queſti coefficienti, e però non ſappiamo quali ſono i negativi, quali i poſitivi. Il mezzo adunque da noi propoſto per la claſſe de' coefficienti negativi ſarebbe di neſſun uſo ſe il fine della noſtra ricerca ſarebbe a trovarne il maſſimo negativo. Noi ci contentiamo però di un numero maggiore di eſſo; e perciò facendo la ſoſtituzione ſopra indicata in tutti i coefficienti in queſtione ſieno o non ſieno negativi, è chiaro che ne' non negativi noi potremmo avere con eſſa de' riſultati poſitivi, nulli o negativi: e ſene mettiamo queſt' ultimi, cioè i negativi, in linea co' riſultati che ſi avrebbero da' coefficienti negativi, è chiaro egnalmente che ſcegliendone fra tutti il più grande, noi

prenderemo un numero ſempre maggiore del maſſimo coefficiente negativo in tutti quei caſi che corriſpondono a' valori poſitivi di x.

Se poi nell' equazione propoſta e ne' coefficienti in queſtione ſi metterà $-x$ per x, e quindi ſi ripeterà ſopra di eſſi l' operazione iteſſa di ſopra, allora ſi avrà con ciò il numero maggiore del maſſimo coefficiente negativo in tutti quegli altri casi che corriſpondono a' valori negativi di x. Quindi fra queſto numero e quello di ſopra prendendone il più grande, è chiaro che avremo il cercato numero maggiore del maſſimo coefficiente negativo in tutti i caſi de' valori di x. Tutta la ricerca adunque è ridotta a rendere funzioni intere di x i coefficienti di cui ſi tratta: ecco come facilmente ſi ottiene.

106. Per eſeguire queſta riduzione prendo un polinomio indeterminato

$Y = A''x^{m-1} + B''x^{m-2} + C''x^{m-3} +$ ec. per cui ne moltiplico i termini riſpettivi de' coefficienti in queſtione, onde avrò per ciaſcuno di tali prodotti una funzione del grado $2m-2$. Quindi prendo dall' equazione propoſta il valor di x^m

e con esso, moltiplicandolo prima per x e sostituendolo poi nel prodotto che ne risulta, trovo quello di x^{m+1} espresso in x^{m-1} e le potenze ad essa inferiori: così moltiplicando ancora per x questo valor di x^{m+1} e sostituendovi quello di x^m, ne avrò quello di x^{m+2} espresso ancora in x^{m-1} e le potenze ad essa inferiori. Continuando in tal maniera arriverò a formare i valori da x^m fino ad x^{2m-2} tutti espressi in x^{m-1} e le potenze ad essa inferiori. Sostituendo quindi questi valori in quelle funzioni noi l'avremo ridotte dal grado $2m-2$ al grado $m-1$, e ad avere perciò m termini. Se perfine suppongo singolarmente $=o$ i termini di quella fra queste funzioni che rappresenta il prodotto dall' assunto polinomio pel denominatore comune a tutti i coefficienti in questione, avrò nel nuovo stato di questi coefficienti sparito l' x nel denominatore; avrò inoltre $m-1$ equazioni, le quali contenendo l'm indeterminate di detto polinomio

mene daranno coll'eliminazione i rispettivi valori espressi nella prima A'', che si determina a capriccio secondo l'opportunità richiede, ed avrò perciò determinato il polinomio corrispondente ad un dato caso, onde moltiplicare i termini de' coefficienti di cui si tratta per così ridurli da funzioni fratte a funzioni intere di x. L'applicazione di questo metodo a qualche caso particolare renderà più chiare le idee che vi abbiamo esposto in generale. Io non sò allontanarmi dal prenderne uno di quei cui abbiamo applicato il primo metodo, onde poterne fare con questo un paragone. L'applicazione al secondo di essi ne è più semplice e facile, onde io per legge di brevità prendo l'equazione $x^3 - 13x + 5 = 0$ in esso proposta, e passo in una tavola ragionata ad applicarvi il metodo di cui abbiamo trattato.

Tavola ragionata di applicazione.

207. Equazione proposta $x^3 - 13x + 5 = 0$ Coefficienti della (A). $A = 0, B = -13, C = -5, D = \text{ec.} = 0$

Limite ſuperiore delle ſue radici poſitive $=(96)$ 14; limite corriſpondente più proſſimo $(97) = 1$. Fatto $x = \frac{1}{x}$ nell' equazione propoſta ſi avrà la trasformata $x^3 - \frac{13x^2}{5} + \frac{1}{5} = 0$ il limite ſuperiore più proſſimo delle cui radici poſitive eſſendo $(97) = 3$, ci dice che l' inferiore di quelle poſitive della propoſta $= \frac{1}{3}$.

Supponendo nell'equazione propoſta $x = -x$ ne avremo l' equazione $x^3 - 13x - 5 = 0$, i limiti ſuperiore ed inferiore delle cui radici poſitive (97) eſſendo $= 4 = 2$, ci avvertono che 4 ed $\frac{1}{2}$ ſono i limiti ſuperiore ed inferiore delle radici negative della propoſta.

Queſti limiti ſuperiori ed inferiori delle radici sì poſitive che negative potrebbero trovarſi ancor più riſtretti ſe nella propoſta faremo $x = \frac{v}{m}$, e quindi opereremo ſulla riſultante come abbiamo operato ſopra di eſſa.

Prendo $Y = A''x^2 + B''x + C''$, che moltiplico per $A' = 3x^2 - 13$, onde avrò

$$A'Y = 3A'x^4 + 3B''x^3 + (3C'' - 13A'')x^2 - 13B''x - 13C''$$

Vi fostituisco i valori di $x^3 = 13x - 5$, di $x^4 = 13x^2 - 5x$, e ne ottengo

$$A'Y = (26A'' + 3C'')x^2 + (26B'' - 15A'')x - (15B'' + 13C'')$$

epperò $26A'' + 3C'' = 0$, $26B'' - 15A'' = 0$; cioè

$B'' = \frac{15A''}{26}$, $C'' = -\frac{26A''}{3}$; cioè fatto $A'' = 78$ avrò $B'' = 45$, $C'' = -676$. Quindi

$Y = 78x^2 + 45x - 676$, $A'Y = 8113$,

$B'Y = 3x(78x^2 + 45x - 676) = 234x^3 + 135x^2 - 2028x$

$= 135x^2 + 1014x - 1170$

$C'Y = 78x^2 + 45x - 676$. Quindi

$$\frac{B'Y}{A'Y} = \frac{1}{8113}(135x^2 + 1014x - 1170)$$

$$\frac{C'Y}{A'Y} = \frac{1}{8113}(78x^2 + 45x - 676)$$

Quindi mettendovi $\overset{164}{4}$ per x ne' lor termini negativi, ed $\frac{1}{3}$ ne' positivi, ne avremo i risultati $-\frac{817}{8113}, -\frac{1967}{24339}$. Quindi sostituendovi prima x, e poi 4 per x ne' negativi, ed $\frac{1}{2}$ ne' lor termini positivi, ne otterremo $-\frac{20769}{32452}, -\frac{1673}{16226}$

Quindi $\frac{20769}{32452}$ è un numero certamente più grande del massimo coefficiente negativo della (*B*) in tutti i valori di x. Quindi $\frac{53221}{32452}$ è il limite superiore alle sue radici positive, cioè per dir meglio i valori positivi di z sono tutti minori di $\frac{53221}{32452}$, e però quei di $y_m \left(=\frac{1}{z}\right) < \frac{32452}{53221}$... $(=0,61)$. Ma i valori di y_m sono metà positivi, e rispettivamente eguali all'altra metà nega-

tivi: ma queſti valori non ſono che le differenze fra le radici della propoſta; così potrà fiſſarſi il valor di k eguale o minore di 0, 61.

PROB. 31

Determinare i fattori della quantità

$4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2$

108. L'equazioni non ſono che il prodotto di più fattori: noi lo ſappiamo dalla loro natura. Quindi la quantità propoſta può riguardarſi e trattarſi come un' equazione, onde averne i fattori cercati. Ordino pertanto queſta quantità ſecondo le potenze di a, e mettendola ſotto la forma $a^4 - 2(b^2+c^2)a^2 + (b^2-c^2)^2 = 0$, ſcopro che eſſa è un' equazione derivata dal ſecondo grado. Noi ſappiamo che la formula generale $x^{2m} + px^m + q = 0$ di queſta ſpecie di equazioni conduce al riſultato $x = \sqrt[m]{-\frac{1}{2}(p \pm \sqrt{(p^2-4q)})}$

Paragonando quindi queſta formula colla propoſta equazione avremo $m = 2$, $p = -2(b^2+c^2)$, $q = (b^2-c^2)^2$ e finalmente $x = a = \pm(b+c)$, ed $x = a = \pm(b-c)$: donde ſi raccoglie che

$a+b+c=0; a-b-c=0; a+b-c=0; a-b+c=0$ ſono i quattro fattori componenti la quantità enunciata fattori che ſi poſſono facilmente mettere ſotto la forma in cui l' Autore delle lezioni celi ha preſentati.

PROB 32.

Eſtrarre la radice quadrata da $11+\sqrt{120}$, *da* $39+2\sqrt{5}$, *da* $6\sqrt{-1}$

109. I metodi generali ſon ſempre da preferirſi a' particolari. Eſſi hanno fra gli altri il ſommo vantaggio di comprendere in un riſultato tutte le ſoluzioni che vi hanno relazione e rapporto. L' Autore delle lezioni non parla che in un modo particolare del metodo a queſto problema relativo. Io voglio trattarlo adunque in generale: farne vedere la ſua generalità qualunque ſia il grado della radice da eſtraerſi: e moſtrarne in fine come con ſemplici ed opportune ſoſtituzioni ſene ottengono le radici delle propoſte quantità.

110. La formula generale d' aſſumerſi per la radice m di $a+\sqrt{b}$ dee avere una tal forma qua-

to in qualunque operazione si possa soddisfare la condizione che le quantità razionali ed irrazionali in un'equazione debbono essere singolarmente eguali fra loro, e quanto soddisfatta questa condizione ci porti ad un problema determinato. Queste due condizioni d'adempiersi ci guidano a prendere l'irrazionale misto $x+\sqrt{y}$, ovvero introducendo l'indeterminata k, $\sqrt[m]{k(x+\sqrt{y})}$ per la formula della redice in questione; a supporre cioè $\sqrt[m]{(a+\sqrt{b})} = \ldots \sqrt[m]{k(x+\sqrt{y})}$ e ciò perchè elevata ad m quest'equazione di suppoſizione cene darà un'altra in cui contenendo il secondo come il primo membro due parti l'una razionale, e l'altra irrazionale ci darà due incognite in due equazioni, delle quali l'irrazionale contenendo il solo radicale quadrato ci darà, quadrandola, un'altra equazione tutta razionale, e ciò io dico perchè corrisponde e soddisfa alle due notate condizioni. Qualunque altra forma però lesi desse non potrebbe certamente adempirle: poichè se la comporremo di un maggior numero d'incognite anderemo ad un problema indeterminato,

e ci opporremo perciò alla seconda di quelle due condizioni; se gliene introdurremo una sola ci contrasteremo allora colla prima di esse; se prenderemo $\sqrt[n]{y}$ a luogo di $\sqrt{y}$, l' equazione che risulta dall'eguagliar fra loro le parti irrazionali conterrebbe radicali di specie diversa, e perciò quadrata non dando che un irrazionale eguale ad un razionale si urterebbe ancora contro la prima; se finalmente in vece di x le metteremo $\sqrt[n]{x}$, allora elevata ad m si avrebbe in generale il secondo membro tutto irrazionale, e contrario ancora perciò alla medesima prima condizione.

111. Ma si osservi che una quantità qualunque ha tante radici diverse quante sono le unità nell'indice del radicale. Quindi la quantità $a+\sqrt{b}$ non ha la sola radice $x+\sqrt{y}$; ma ne ha in tutto m diverse. Per averle espresse tutte in una formula generale io noto con d qualunque di queste radici; onde avrò $d^m = a+\sqrt{b} = (x+\sqrt{y})^m$ cioè avrò l' equazione

$d^m - (x + \sqrt{y})^m = o$, la quale risoluta ci darà d per mezzo di $x+\sqrt{y}$. In questo luogo che non si tratta di assegnar la quantità delle radici ma semplicemente la forma di esse, io mi riporto alla soluzione trigonometrica che se ne è data (326): onde avrò

$$d = (\cos\frac{2ci}{m} \pm \sqrt{-1}.\,\text{sen}.\frac{2ci}{m})(x+\sqrt{y}) =$$

$(f \pm k\sqrt{-1})(x+\sqrt{y})$. Questa è la forma dell'espressione generale che complette tutte le m radici diverse di $a+\sqrt{b}$.

112 Dietro a queste riflessioni assumiamo l'equazione $\sqrt[m]{(a+\sqrt{b})} = (x+\sqrt{y})\sqrt[m]{k}$: emmiamola quindi ed uguagliamo fra loro le parti razionali ed irrazionali: notiamo infine con n il numero de' termini che precede uno qualunque in posto impari dello sviluppo di $(a+b)^m$ ed avremo

$$(a)\ldots k(x^m + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}y + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot3\cdot4}x^{m-4}y^2$$

$$+\ldots\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{2\,3\,\ldots\,n}x^{m-n}y^{\frac{n}{2}} + \text{ec.}) = a$$

$$(b)\ldots k\sqrt{y}\,(mx^{m-1} + \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot3}x^{m-3}y$$

$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-4)}{2\cdot3\ldots5}x^{m-5}y^2$$

$$+\ldots\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{2\cdot3\ldots(n+1)}x^{m-n-1}y^{\frac{n}{2}} + \text{ec.}) = \sqrt{b}$$

Essendo $\sqrt[m]{(a+\sqrt{b})} = (x+\sqrt{y})\sqrt[m]{k}$ sarà $a+\sqrt{b} = k(x+\sqrt{y})^m$ epperò $a-\sqrt{b} = k(x+\sqrt{y})^m - 2\sqrt{b}$. Quindi sviluppando e sostituendo per $\sqrt{b}$ il suo valore preso dall'equazione (b) avremo $a-\sqrt{b} = k(x-\sqrt{y})^m$ epperò $\sqrt[m]{(a-\sqrt{b})} = (x-\sqrt{y})\sqrt[m]{k}$

113. Le due equazioni $\sqrt[m]{(a \pm \sqrt{b})} =$ $(x \pm \sqrt{y}) \sqrt[m]{k}$ multiplicate insieme mi danno $\sqrt[m]{\frac{a^2 - b}{k^2}} = x^2 - y$, epperò preso per k un valor tale quanto soddisfaccia all' equazione $\frac{a^2 - b}{k^2} = p^m$ (valore sempre possibile ad aversi, poichè non trovandone altro può sempre farsi $k = (a^2 - b)^{\frac{1 \pm m}{2}}$) mi dà le parti componenti la radice in questione. In fatti dall' equazione $\frac{a^2 - b}{k^2} = p^m$ abbiamo $y = x^2 - p$, epperò l'equazione (a) sarà trasformata nella

$$(c)\ldots k\Big(x^m + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}(x^2-p) + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot3\cdot4}x^{m-4}(x^2-p)^2 + \ldots \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{2\cdot3\ldots n}x^{m-n}(x^2-p)^{\frac{n}{2}} \text{ ec.}\Big)$$

$= u$, la quale, ſviluppate le potenze diverſe di x^2-p, ed ordinata per x, ſi preſenta ſotto l'eſpreſſione.

$$x^m\Big(1 + \frac{m(m-1)}{3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\ 3\cdot4} \ldots \frac{A\ldots m\ldots(m-n+1)}{2\ldots n} + \text{ec.}\Big)$$

$$-px^{m-2}\Big(\frac{m(m-1)}{2} + \frac{2m(m-1)\ldots(m-3)}{2\cdot3\cdot4} \ldots \frac{n.m\ldots(m-n+1)}{2.2\ldots n} + \text{ec.}\Big)$$

$$+p^2x^{m-4}\left(\frac{m\ldots(m-3)}{2\ldots4}+\frac{3m\ldots(m-5)}{2\ldots5}\right.$$

$$\left.+\ldots\ldots\frac{n(n-2).m\ldots(m-n+1)}{2.4.2\ldots n}+\text{ec.}\right)$$

$$-p^3x^{m-6}\left(\frac{m\ldots(m-5)}{2\ldots6}+\frac{4m\ldots(m-7)}{2\ldots8}\right.$$

$$\left.+\ldots\ldots\frac{n(n-2)(n-4).m\ldots(m-n+1)}{2.3.8.2\ldots n}+\text{ec.}\right)$$

$$+p^4x^{m-8}\left(\frac{m\ldots(m-7)}{2\ldots8}+\frac{5m\ldots(m-9)}{2\ldots10}\right.$$

$$\left.+\ldots\ldots\frac{n(n-2)(n-4)(n-6).m\ldots(m-n+1)}{2.3.4.16.2\ldots n}+\text{ec.}\right)$$

$$-\text{ec.}$$

$$=\frac{e}{k}$$

114. Per dare una espressione più semplice a questa equazione e così farla più facile alla soluzione, io ricorro alla legge, se esiste, con cui progrediscono l' equazioni particolari che

essa rappresenta in generale. Faccio adunque $m = 2 = 3 = 4 = 5 = 6 =$ ec., e ne avrò la tavola seguente di equazioni.

$2x^2 - p = \frac{a}{k}$ 114.

$4x^3 - 3px = \frac{a}{k}$

$8x^4 - 8px^2 + p^2 = \frac{a}{k}$

$16x^5 - 20px^3 + 5p^2x =$

$32x^6 - 48px^4 + 18p^2x$

$64x^7 - 112px^5 + 56p^2$

$128x^8 - 256px^6 + 160$

$256x^9 - 576px^7 + 432$

$512x^{10} - 1280px^8 + 1$

$1024x^{11} - 2816px^9 + = \frac{a}{k}$

$2048x^{12} - 6144px^{10} + + p^6 = \frac{a}{k}$

$4096x^{13} - 13312px^{11} + 5x^3 + 13p^6x = \frac{a}{k}$

&c. &c.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
N. 1

5. num. 1153

$$\frac{5)(11-6)(11-7)}{2.3.4} \int 2x \int^{11-} p^{\tau} - \frac{}{} \qquad p - \overline{k}$$

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI

115, Offervando la ſerie dell' equazioni di queſta tavola mi avveggo, che duplicandone ciaſcuna poſſiamo metterle ſotto l'eſpreſſione, in cui le veggiamo nell'altra quì appreſſo inſerita. E ciò lo facciamo per aſſicurarci dell' eſiſtenza, e convincerci del carattere di quella legge che ci occuppiamo a ſcoprire nel loro progreſſo.

116. Che esiste una legge costante nel progresso di quest' equazioni, ed in che consiste questa legge, è molto facile a rilevarsi. In effetto un termine qualunque di esse ha un coefficiente sempre composto di tanti fattori quanto è il numero de' termini che lo precede: il primo di questi fattori nel numeratore eguaglia sempre il grado dell' equazione; il secondo si ha sempre col diminuire questo grado del numero de' termini, cui quello in questione corrisponde; e gli altri si hanno col sottrarre successivamente l' unità da questo secondo fattore: questi fattori poi nel denominatore non sono che i termini consecutivi della serie de' numeri naturali; questo termine contiene inoltre $2x$ elevato al grado $2m$ dell'equazione diminuito del doppio del numero de' termini precedenti, e la potenza di p eguale a questo numero di termini. Quindi essendo n il numero de' termini che precede un certo termine T, sarà

$$T = \frac{m(m-n-1)(m-n-2)\ldots(m-2n+1)}{2.3\ldots n}(2x)^{m-2n}p^n$$

la espressione generale di esso, e perciò

$$(c)\ldots(2x)^m - m(2x)^{m-2}p + \frac{m(m-3)}{2}(2x)^{m-4}p^2 -$$

$$\frac{m(m-4)(m-5)}{2\cdot 3}(2x)^{m-6}p^3 + \ldots$$

$$\frac{m(m-5)(m-6)(m-7)}{2\cdot 3\cdot 4}(2x)^{m-8}p^4 - \ldots$$

$$\frac{m(m-6)(m-7)(m-8)(m-9)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(2x)^{m-10}p^5 + \text{ec.} = \frac{2a}{k}$$

per la più semplice espressione cercata dell'equazione (*c*): equazione dalla cui soluzione dipende la radice in questione. Quindi tutte le volte che questa equazione avrà delle radici razionali allora della quantità proposta sene può ottenere la desiderata radice. Il metodo adunque di cui si tratta porta alla soluzione di un'equazione del grado stesso della radice che si tratta di estrarre. Quando questo grado però è pari, quando cioè $m = 2r$ allora l'equazione fondamentale può ridursi al grado r, e semplicizzarsi molto perciò la soluzione del problema.

117. In fatti nel caso di m pari l'equazione (*c*) non contiene in tutti i suoi termini che le

potenze pari di $2x$. Quindi facendovi $x^2 = z$, sene avrà prontamente la desiderata riduzione. Essendo però in questo caso $x = \sqrt{z}$, ne avviene che la radice de' gradi pari sarà sempre della forma $(\sqrt{z} + \sqrt{y})\sqrt[m]{k}$

118. Veniamo ormai ad applicare il metodo esposto alle quantità enunciate. Paragoniamo pertanto queste quantità colla formula generale $\sqrt[m]{(a+\sqrt{b})}$, e ne avremo $m = 2, a = 11, = 39, = 0$, e $b = 120, = 20, = -36$. Quindi sarà

$$\frac{a^2-b}{k^2} = \frac{1}{k^2}, = \frac{1501}{k^2}, = \frac{36}{k^2}$$ ovvero supposto

$k = 1, = \sqrt{1501}, = 1$, sarà $\frac{a^2-b}{k^2} = 1, = 1, = 36$, e $p = 1, = 1, = 6$. Quindi l'equazione (c) dandoci le tre equazioni particolari $2z - 1 = 11$, $(2z-1)\sqrt{1501}, = 39, 6(2z-1) = 0$, ci dà $z = 6, = \frac{39+\sqrt{1501}}{2}, = 3$; e però $y = 5, = \frac{39-\sqrt{1501}}{2}$,

$= -3$. Quindi finalmente sarà $\sqrt{(11+\sqrt{120})} =$

$\sqrt{6}+\sqrt{5}$, $\sqrt{(39+2\sqrt{5})} = \sqrt{\frac{39+\sqrt{1501}}{2}}$

$+\sqrt{\frac{39-\sqrt{1501}}{2}}$, $\sqrt{(6\sqrt{-1})} = \sqrt{3}+\sqrt{-3}$:

Quì si noti pria di finire che il secondo risultato ci dee far riguardare come impossibile l' estrazione della radice della seconda quantità enunciata, come il calcolo ci avea diggià pronunciato col darci z irrazionale :

PROB. 33.

Quali sono i numeri la cui somma è a ed il quoziente del minore diviso per la radice cuba del maggiore è g?

Chiamo y il maggiore ed x il minore de' due numeri in questione, e ne avrò le due equazioni di condizione $y+x = a$, $\frac{x}{\sqrt[3]{y}} = g$: donde ottengo $y = a-x$, ed $x^3+g^3x-ag^3 = 0$. Lo sviluppo adunque di questo problema non dipende che dalla soluzione di un' equazione del terzo grado.

119. Il Bezout, uno degli Analisti più grandi che in materia di analisi pura abbiano conosciuto i tempi nostri, ci ha dato nelle memorie dell' Accademia delle scienze di Parigi (an. 1762. 1765.) un metodo generale onde algebricamente risolvere l' equazioni di tutti i gradi. Questo metodo quantunque riesca sì laborioso a maneggiarsi quando si tratta di equazioni che superano il quarto grado quanto lo stesso Bezout sembra avervi rinunciato o ad altro tempo rimesso per migliorarlo: frattanto per esser uno de' più ingegnosi di quanti ne sono stati immaginati sinora; per essere, a giudizio del Lagrange, uno di quelli da cui possiamo sperarne un giorno qualche vantaggio; e per non essere infine esposto per l' ordinario ne' libri elementari: è che io voglio quì darne una breve e succinta idea, con applicarlo quindi all' equazione finale del proposto problema.

120. Ogni equazione determinata

$x^m + ax^{m-1} + a'x^{m-2} + \ldots v = 0$ può riguardarsi come il risultato di due equazioni a due incognite delle quali l'una è stata eliminata. Quindi il Bezout venne ad assumere due equazioni della forma,

sù queſto ſoggetto; che il Bezout medeſimo ne è l'autore; e che egli ha eſpoſto nella ſua *Teoria dell'equazioni* con tanti dettagli che ne ha eſaurito per così dire l'intero ſoggetto.

122. Per eſeguire un'eliminazione completa uop'è che l'equazioni date ſieno tante quanto è il numero delle incognite in queſtione. Quindi ſuppongo che l'equazioni date ſieno complete; che u ne ſia il loro numero, e però anche u quello delle incognite in eſſe combinate; e che ſuppoſte ordinate nel grado ad ordine di grandezza ſieno notate colle formule.

$(t.....v)^m = 0$, $(t.....v)^n = 0$, $(t.....v)^p = 0$, $(t.....u)^q = 0$, $(t.....v)^r = 0$, ec. Dopo ciò ſi prenda un polinomio completo fralle medeſime incognite v di un grado indeterminato a, ed a coefficienti indeterminati, e ſe ne moltiplichi la prima delle date equazioni onde ſene avrà l'equazion prodotta $(t.....v)^{a+m} = 0$. Si prendano dalle altre equazioni date i valori di u^n, x^p, y^q, z^r ec., e ſi ſoſtituiſcano in eſſa onde far concorrere alla ſua formazione tutte le date equazioni, cioè onde

racchiudere in essa tutte le relazioni date fra le incognite in questione. Quindi in questa trasformata dell'equazion prodotto, che chiamo T, si facciano $=o$ i coefficienti di tutti i termini che in essa sono affetti dalle incognite u, x, y, z, ec. e sene avranno dell'equazioni onde determinare le indeterminate introdotte col polinomio moltiplicatore; ed in fine si avrà un'equazione, la quale non contenendo che la sola incognita t, ne sarà l'equazion finale della proposta eliminazione.

123. Per determinare queste indeterminate è chiaro che noi abbiamo bisogno di tante equazioni quanto è il loro numero, ovvero volendone lasciare una arbitraria onde avere il campo di dare al primo termine dell'equazion finale il coefficiente 1, ne abbiamo bisogno una di meno di quanto è questo numero. Ma si rifletta che il numero di queste indeterminate dipende soltanto dalla scelta del polinomio moltiplicatore, e quello de' termini della T da egualarsi a zero onde averne quell'equazioni, che dar ce-ne dovranno il valore, ha una dipendenza combinata di questo polinomio colle date equazioni.

Quindi la ſcelta del polinomio moltiplicatore dée variare a ſeconda dell' equazioni date; e variare eziandio ſotto la condizione che il numero delle ſue indeterminate ſia tale che combinato colle date equazioni deſſe nella T tanti de' ſuindicati termini da egualarſi a zero quanto unità meno una eſſo contiene, ſia tale cioè quanto eſpreſſo con A tene aveſſe, chiamando B quello degl' indicati termini della T, l' equazione di condizione $A=B+1$

124. Si oſſervi in queſto luogo che la determinazione delle A indeterminate è dipendente dalla ſoluzione delle B equazioni: quindi è che biſogna combinare in maniera queſte indeterminate nel polinomio moltiplicatore quanto queſte equazioni riſultino le più ſemplici. La maniera più ſemplice di avere in generale queſte equazioni ſi è di non farle aſcendere il primo grado. Quindi biſogna limitare al primo grado le indeterminate che ſi aſſumono col polinomio moltiplicatore, perchè è chiaro che allora queſt' equazioni neppure aſcenderanno queſto grado.

125. Si oſſervi inoltre che il polinomio mol-

tiplicatore dovendo eſſer completo ſa che il numero de' ſuoi termini, e perciò quello delle indeterminate in eſſo contenute è dipendente dal ſuo grado, fa cioè che A dee eſſer ſempre una funzione di a. Quindi l' equazione di condizione $A=B+1$ ci dovrà far conoſcere il grado, e però il numero delle indeterminate del polinomio moltiplicatore, e quindi ci darà la conoſcenza del grado dell' equazion finale, e del valore delle indeterminate che vi ſon contenute, ci farà conoſcere cioè tuttocciò che dee ſaperſi onde avere la piena cognizione dell' equazion finale. Paſſiamo adunque alla determinazione delle parti componenti queſta equazione di condizione.

126. Per avere A, per avere cioè il numero de' termini contenuti in un polinomio completo di un grado qualunque m, I. mi avveggo che facendo ne' termini dello ſviluppo $(t+u)^m$ ſucceſſivamente

$$u=u+x=u+x+y=u+x+y+z=\text{ec.}$$

ſene ha la ſavola ſeguente

Term. dello ſvil. di $(t+u)^m$.

$$t^m, \quad t^{m-1}u, \quad t^{m-2}u^2, \quad t^{m-3}u3, \ldots . u^m$$

Term. dello ſvil. di $(t+u+x)^m$

$$t^m, \ t^{m-1}(u+x), \ t^{m-2}(u+x)^2, \ t^{m-3}(u+x)^3, \ldots (u+x)^m$$

Term. dello ſvil. di $(t+u+x+y)^m$

$$t^m, \ t^{m-1}(u+x+y), \ t^{m-2}(u+x+y)^2, t^{m-3}(u+x+y)^3,$$

$$\ldots \ldots (u+x+y)^m$$

Term. dello ſvil. di $(t+u+x+y+z)^m$

$$t^m, \quad t^{m-1}(u+x+y+z), \quad t^{m-2}(u+x+y+z)^2,$$

$$t^{m-3}(u+x+y+z)^3, \ldots \ldots (u+x+y+z)^m$$

ec. ec.

II. Mi avveggo dippiù che facendo nella prima linea orizzontale di eſſa $u=1$, nella ſeconda $x=1$, nella terza $y=1$, nella quarta $z=1$, e così di ſeguito, i termini che riſpettivamente la compongono divengono quelli di un polinomio completo ad una, a due, a tre, ec. incognite dello ſteſſo grado m, e perciò che la ſomma

ci quei di un polinomio completo di questo grado ad v incognite eguaglia la somma di quelli della potenza m di un polinomio di $(v+1)$ termini, e conchiudo pertanto che la determinazione di A si riduce in generale a quella del numero de' termini dello sviluppo dell'm potenza di un polinomio qualunque.

III. Mi avveggo infine opportunamente per quest'ultima ricerca, che i numeri de' termini, i quali singolarmente in ciascuna linea di questa tavola sono affetti dalla potenza stessa di t formano sempre nel loro progresso una delle serie de' numeri figurati, cioè pel binomio quella del primo ordine, pel trinomio quella del secondo ordine, pel quadrinomio quella del terzo ordine, e così seguitando per l'$(v+1)$nomio quella del l'v ordine. Quindi si avrà (l. 331)

n. de' term di $(t+u)^m = n$

n. de' term. di $(t+u+x)^m = \frac{n(n+1)}{2}$

n. de' term. di $(t+u+x+y)^m = \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3}$

n. de' ter. di $(t+u+x+y+z)^m = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$

ec. ec.

Donde si raccoglie per analogia che il numero de' termini della potenza m dell'$(v+1)$nomio si ha generalmente espresso nell' espressione $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+v-1)}{2.3.4\ldots v}$. Ma siccome il numero de' termini nella serie corrispondente a ciascuna linea è sempre $n=m+1$; così il valor di A ci è sempre espresso dalla formula generale $A=\frac{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+v)}{2.3.\ldots v}$, ovvero notando, per la semplicità della cifrazione, coll' ultimo fattore semplicemente questa espressione, notazione che ancora praticherò per l' appresso in tutti i casi simili, dalla $A=\frac{(m+v)}{v}$.

127. Per aver B, cioè il numero de'termini che nell' equazion T sono affetti dalle incognite fuori la t, si rifletta che se nell' equazion prodotto si prendono tutti i termini moltiplicati per u^n, e dopo la sostituzione del suo valore sene considera il risultato, è chiaro che si vedranno de' termini tali quanto trovano tutti i

lor ſimili nella ſteſſa equazion prodotto; e perciò ammaſſandoſi con queſti lor ſimili ne avviene che coll'indicata ſoſtituzione il numero totale de' termini dell' equazione ſi viene a diminuire di quello degli affetti di u^n: dippiù che ſe eſcluſi i termini di u^n nell' equazion prodotto ſi ſoſtituiſce il valor di x^p, il numero de' ſuoi termini in queſto ſtato verrà per la ſteſſa ragione diminuito di quello degli affetti di x^p; che ſe eſcluſi queſti ancora ſi ſoſtituiſce il valor di y^q, il numero de' ſuoi termini in queſto ſecondo ſtato ſarà ancora diminuito da quello degli affetti di y^q; e così di ſeguito. Ma ſiccome l' equazion prodotto non ſi trasforma nella T che colla ſoſtituzione ſemplicemente de' valori di u^n, x^p, y^q, ec.; così per avere il numero de' termini di queſta trasformata non biſogna che levar da quello dell'equazion prodotto il numero degli affetti di u^n, più il numero di quelli, che ſenza eſſere affetti di u^n, lo ſono di x^p, più il numero di quelli che ſenza eſſerlo di u^n, x^p, lo

ſono di y^q, e così di ſeguito. Quindi ſe noi notiamo con h la ſomma di queſti numeri di termini, e ci ricordiamo che l'equazion prodotto non è che un polinomio completo ad v incognite del grado $a+m$, e perciò che il ſuo numero di termini è eſpreſſo da $\frac{(a+m+1)(a+m+2)\ldots(a+m+v)}{2,3.\ldots\ldots v}$, cioè adottando la notazione (126) da $\frac{(a+m+v)}{v}$, noi avremo il numero de' termini della $T=\frac{(a+m+v)}{v}-h$. Se da queſto numero di termini poi ne leviamo quello dell'equazion finale, che chiamandone k il grado ſarà eſpreſſo da $k+1$, ne avremo quello di $B=\frac{(a+m+v)}{v}-h-k-1$ e però l'equazione di condizione $A=B+1$ divenendo $\frac{(m+v)}{v}=\frac{(a+m+v)}{v}-h-k$ ci da $k=\frac{(a+m+v)-(m+v)}{v}-h$. Quindi per conoſcere il grado dell'equazion finale uop' è che ſi conoſca ancora il valore di h.

128. Per arrivare a queſt' ultima cognizione fiſſiamo per un momento l' attenzione ſull' equazion prodotto, ed oſſerveremo facilmente che l' aggregato di tutti i termini diviſibili per u^n compone, non conſiderando queſto lor fattore comune, un polinomio completo delle medeſime incognite del grado $a+m-n$; che quello di tutti i diviſibili per x^p, ne compone un altro del grado $a+m-p$; che quello di tutti i diviſibili per y^q ne compone un terzo del grado $a+m-q$; e così in appreſſo. Quindi i numeri riſpettivi di tutti i termini parzialmente affetti di u^n, x^p, y^q, ec. ſono gli ſteſſi di quelli de' polinomj completi

$$(t \ldots v)^{a+m-n}, (t \ldots v)^{a+m-p},$$
$$(t \ldots v)^{a+m-q}, (t \ldots v)^{a+m-r}, \text{ ec;}$$

cioè ſono

$$\frac{(a+m-n+v)}{v}, \quad \frac{(a+m-p+v)}{v}$$
$$\frac{(a+m-q+v)}{v}, \quad \frac{(a+m-r+v)}{v}, \text{ ec.}$$

129. Or ſe dal numero di tutti i termini che nell' equazion prodotto, ſono diviſibili per x^p, ſene toglie quello che velo ſono nel polinomio completo $(t \ldots v)^{a+m-n}$, che eguaglia il numero di quelli del polinomio completo $(t \ldots v)^{a+m-n-p}$ cioè $\frac{(a+m-n-p+v)}{v}$, è chiaro che ſe ne avrà il numero de' diviſibili per x^p ma non per u^n eſpreſſo da $\frac{(a+m-p+v)}{v} - \frac{(a+m-n-p+v)}{v}$: ſe dal numero di tutti quei che nella ſteſſa equazion prodotto ſono diviſibili per y^q ſene toglie quello che velo ſono in $(t \ldots v)^{a+m-n}$, cioè $\frac{(a+m-n-q+v)}{v}$, e quello ancora che velo ſono ne' diviſibili per x^p ma non per u^n, cioè $\frac{(a+m-p-q+v)}{v} - \frac{(a+m-n-p-q+v)}{v}$, ſene avrà quello de' diviſibili per y^q ma non per u^n, x^p, eſpreſſo da

$$\frac{1}{v}\left\{(a+m-q+v)-(a+m-n-q+v)-(a+m-p-q+v)+(a+m-n-p-q+v)\right\}$$

Nel modo ſteſſo ſi troverà, che quello de' divisibili per z^r ma non per u^n, x^p, y^q è eſpreſſo dalla formula

$$\frac{1}{v}\left\{(a+m-r+v)-(a+m-n-r+v)+(a+m-p-r+v)+(a+m-n-p-r+v)-(a+m-q-r+v)+(a+m-n-q-r+v)+(a+m-p-q-r+v)-(a+m-n-p-q-r+v)\right\}$$

a così ſeguitando ſi troveranno tutti gli altri numeri che dovranno ſommarſi onde avere il valore di h. Ma come ottenere in generale queſta ſomma mercè le trovate eſpreſſioni? Il calcolo alle differenze ce ne preſenta un mezzo facile e pronto, che quì non può avere il ſuo luogo. Io lo eſporrò in forma di applicazione allorchè nelle lezioni che promiſe nell' avvertimento dovrò parlare di queſto calcolo. Dico

perora ſoltanto che queſta ſomma riſulterà tale quanto meſſa per h nell' eſpreſſione del valore di k, ci darà $k = mnpqr\ldots$, ci darà cioè il grado dell' equazion finale eguale al prodotto di tutti gli eſponenti dell' equazioni in queſtione.

130. Conoſcendo k ſi conoſce ancora a. In effetto l'equazion prodotto non è che un polinomio completo del grado $a+m$, e però $a+m$ è il numero delle dimenſioni di ciaſcun de' ſuoi termini: inoltre l' equazioni date non ſono che de' polinomj completi de' gradi n, p, q, r, ec., e però il maſſimo eſponente della t ſarà in ciaſcuna di eſſe riſpettivamente $= n = p = q = r =$ ec. Quindi dovendo nell' equazion prodotto il termine in cui vi entrano tutte le incognite eſſere della forma $t^{a+m\,n-p\,\ldots\,u^n x^p}\ldots$ ne avviene che nella T non può l'incognita t avere un eſponente più alto di $a+m$: eſponente che ſi conſerva ancora il maggiore nell' equazion finale. Il grado adunque dell' equazion finale ſi è ancora eſpreſſo da $a+m$, e perciò eſſendo $k = a+m$ ſarà $a = m(npqr\ldots - 1)$

131. Ma come applicar queſto metodo alla ſoluzione dell' equazioni. Queſto è quello che reſta ad eſeguirſi. Ed il Bezout avrebbe forſe ciò fatto ſe la morte, ſeguita poco dopo la pubblicazione di queſto ſuo metodo, non glielo aveſſe impedito. Una teoria dell' equazioni è ſtata di recente pubblicata dal Ruffini. Ed il Paoli nel volume delle aggiunte a' ſuoi elementi di Algebra ci avverte che co' travagli del Lagrange e con queſt' opera, reſta compita in Italia ove nacque queſta teoria. Il Ruffini adunque avrà forſe eſaurito queſto ſoggetto; ſoggetto in cui conſiſte tutta la difficoltà, e l' imperfezione della ſoluzione algebrica dell' equazioni. Ma queſt' opera non è arrivata a queſte parti: nè l' iſtorico delle Matematiche ſembra conoſcerla all' epoca dell' ultima edizione della ſua iſtoria. Ci baſta adunque di aver fatto un cenno di queſto elegantiſſimo metodo; e ciò per non omettere l' occaſione che ci ſi è preſentata, onde renderlo commune, e farlo più chiaro ed intelligibile alla gioventù.

132. Paſſo inoltre ad applicare al caſo del problema propoſto il metodo generale che mi ha portato a parlare dell' eliminazione e prendo perciò le due equazioni $y^3 - 1 = 0$, $by^2 + cy + x = 0$ delle quali ne moltiplico la ſeconda per y onde averne la $by^3 + cy^2 + xy = 0$ del grado medeſimo della prima, e la prima per b onde averne $by^3 - b = 0$. Quindi ſottraggo queſta da quella e ne ho $cy^2 + xy + b = 0$, che colla $by^2 + cy + x = 0$, mi dà, riguardando y^2 ed y come due incognite, $y^2 = \frac{x^2 - bc}{c^2 - bx}$, $y = \frac{b^2 - cx}{c^2 - bx}$. Moltiplico poi per y la $cy^2 + xy + b = 0$, e mettendo nel prodotto il valore 1 di y^3 e quei di y^2, y, ho $x^3 - 3bcx + b^3 + c^3 = 0$. Paragono queſta equazion finale colla $x^3 + g^3x - ag^3 = 0$ delle condizioni enunciate e ne avrò $g^3 = -3bc$, $b^3 + c^3 = -ag^3$ e perciò $c^3 - \frac{g^9}{27c^3} = \ldots$

$-ag^3$, cioè $c^6+ag^3c^3=\frac{g^9}{27}$, cioè un' equazione derivativa del secondo grado che ci dà prontamente $c=-\sqrt[3]{\left\{\frac{ag^3}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2g^6}{4}+\frac{1}{27}g^9}\right\}}$, e quindi $b=-\sqrt[3]{\left\{\frac{ag^3}{2}\mp\sqrt{\frac{a^2g^6}{4}+\frac{1}{27}g^9}\right\}}$.

Metto questi valori in quello di x preso dalla seconda delle due assunte equazioni e ne avrò

$$x=y^2\sqrt[3]{\left\{\frac{ag^3}{2}\mp\sqrt{\frac{a^2g^6}{4}+\frac{g^9}{27}}\right\}}+y\sqrt[3]{\left\{\frac{ag^3}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2g^6}{4}+\frac{g^9}{27}}\right\}}$$

prendo in fine le tre radici

$$y=1,\quad y=-\frac{1+\sqrt{-3}}{2},\quad y=-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$$

dell' equazione $y^3-1=0$, e mettendole nel

trovato valor di x fe ne avranno le tre

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{ag^3}{2} + \sqrt{\frac{a^2g^6}{4} + \frac{g^9}{27}}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{ag^3}{2} - \sqrt{\frac{a^2g^6}{4} + \frac{g^9}{27}}\right)}$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\left(\frac{ag^3}{2} + \sqrt{\frac{a^2g^6}{4} + \frac{g^9}{27}}\right)} + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\left(\frac{ag^3}{2} - \sqrt{\frac{a^2g^6}{4} + \frac{g^9}{27}}\right)}$$

$$x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\left(\frac{ag^3}{2} + \sqrt{\frac{a^2g^6}{4} + \frac{g^9}{2}}\right)} + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\left(\frac{ag^3}{2} + \sqrt{\frac{a^2g^6}{4} + \frac{g^9}{27}}\right)}$$

dell' equazione $x^3 + g^3x - ag^3 = o$, che risolvono la queſtione propoſta.

133. Queſta eſpreſſione algebrica delle radici dell'equazioni del terzo grado è conoſciuta ſotto il nome di formula Cardanica. Girolamo Cardano quantunque non ſia ſtato il primo a ritrovarla; quantunque l'abbia appreſo colla dimoſtrazione o nò dal Tartaglia; per eſſerſi frattanto diſtinto nel trattarla, e per avercela communicata, ha avuto la gloria di darle il ſuo nome in preferenza dell' inventore. Ma non ſono le ſole equazioni del terzo grado che ammettono per radice la formula Cardanica. In tutti i gradi vi ſon dell' equazioni che ne ammettono della forma medeſima. L'eſporre ora in generale quell' equazioni che ammettono la ſua formola per radice; il determinare così i confini cui la ſua teoria ſi eſtende e ſi limita: mi ſembra una ricerca degna a fermarci in queſto luogo, onde dare alla ſoluzione Cardanica dell'equazioni una veduta più ſublime inſieme e più luminoſa. Il dettaglio adunque di queſta teoria generale occuperà il ſeguente tratto di queſta lezione teoria che io eſtenderò ſino a moſtrare ancora in generale l'impoſſibilità di riſolvere il così detto caſo irriducibile; teoria in cui eſporrò un metodo tri-

gonometrico generale e nuovo onde averne in queſto caſo le radici ; teoria finalmente che per quanto io ſappia niuno ha eſpoſto finora in un piano così concepito ed eſteſo .

134. Sia in generale $x^m + a'x^{m-1} + ax^{m-2} + b'x^{m-3} + bx^{m-4} + \ldots hx^{m-n} + \ldots rx^2 + vx + t = o$ un' equazione del grado m, e ſia ſuppoſto , giuſta il metodo ordinario, $v = y + \frac{p}{y}$ onde averne la corriſpondente trasformazione . Per arrivare a queſto intento giova il ricordarſi che i coefficienti della ſerie dello ſviluppo di $(a+b)^m$ creſcono ſino al termine $\frac{1}{2}(m+1)$ quando m è impari , e ſino all' $\frac{1}{2}(m+2)$ quando è pari , donde decreſcono con un progreſſo retrogrado a quello degli aumenti, ed in maniera tale che due qualunque di eſſi egualmente diſtanti dai termini

estremi sono eguali; in maniera tale cioè che il coefficiente di un termine qualunque $r+1$ ha sempre il suo eguale in quello del termine $m-(r-1)$: giova dippiù il ricordarsi che gli esponenti delle quantità a, b in ciascun di questi due termini eguali sono nell'una il numero r de' termini che lo precede, ed il numero $m-r$ che lo siegue nell'altra: giova il richiamarsi perfine ch la espressione del termine generale delle coppie di questi termini eguali si è

$$\frac{m\,(m-1)\ldots(m-r+1)}{2\cdot 3\ldots\ldots r}\,(a^r b^{m-r}+b^r a^{m-r}):$$

espressione di cui nel caso di m pari dovrà quando $r=\frac{m}{2}$ stimarsi per metà, in quanto questo termine è unico in tal caso nella serie: Quindi raccogliendo giova dico il riflettere che la serie dello sviluppo di $(a+b)^m$ può scriversi in generale e compiutamente sotto la forma

$$(a+b)^m = a^m + b^m + m(a^{m-1}b + b^{m-1}a)$$

$$+ \frac{m(m-1)}{2}(a^{m-2}b^2 + b^{m-2}a^2)$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}(a^{m-3}b^3 + b^{m-3}a^3)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{2.3\ldots r}(a^{m-r}b^r + b^{m-r}a^r)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots\frac{m+3}{2}}{2.3\ldots\frac{m-1}{2}}\left(a^{\frac{m+1}{2}}b^{\frac{m-1}{2}} + b^{\frac{m+1}{2}}a^{\frac{m-1}{2}}\right)$$

(ovvero)

$$\frac{m(m-1)\ldots\frac{m+2}{2}}{2.3\ldots\frac{m}{2}}a^{\frac{m}{2}}b^{\frac{m}{2}}$$

(secondo che m è impari o pari.)

135. Applicando questa riflessione alle diverse parti dell' equazione proposta; indicando con n' il numero de' termini che precede in esse un termine qualunque; e supponendo n un numero pari: avremo secondo che m è impari o pari la tavola che va quì appresso inserita.

$$\frac{}{}{}^{2}+1)\ p^{n'}\Big(y^{m-2n_1}+(p:y)^{m-2n'}\Big)+\ldots$$

$$+\frac{m(m-1)\ldots\frac{m+2}{2}}{2\ldots\frac{m}{2}}p^{\frac{m}{2}}$$

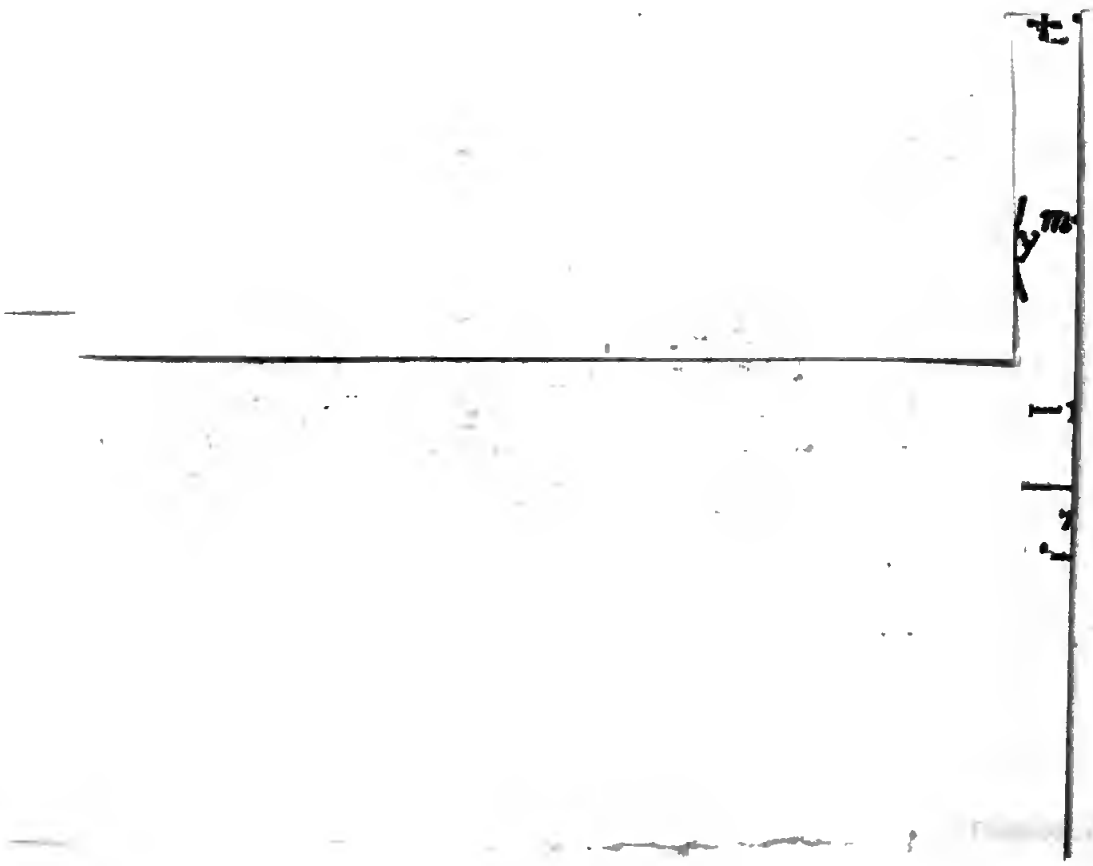
$$\frac{m-1)\ldots(m-n'}{2\ldots n'}\Big(y^{m-2n'-1}+(p:y)^{m-2n'-1}\Big)+$$

$$\frac{(m-n)\ldots\frac{m-n+2}{2}}{2\ldots\frac{m-n}{2}}p^{\frac{m-n}{2}}$$

$$-2n'-n-1}+(p:y)^{m-2n'-n-1}\Big)+\ldots$$

$$1)\ldots\frac{m-n-2}{2}}{\frac{n-n-2}{2}}p^{\frac{m-n-2}{2}}(y+p:y)$$

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE
NAPOLI



Digitized by Google

136. Si offervi ora per la foſtituzione di queſti valori nell'equazione di cui ſi tratta che il termine n' in x^m, x^{m-1} ha l'eſponente medeſimo del termine $n'-1$ in x^{m-2}, x^{m-3}; del termine $n'-2$ in x^{m-4}, x^{m-5}; del termine $n'-3$ in x^{m-6}, x^{m-7}; e così ſeguitando del termine $n'-\frac{n}{2}$ in x^{m-n}, x^{m-n-1}. Si offervi dippiù che gli eſponenti dell'equazion propoſta diminuendo di uno in uno, e quei del valor di x^m di due in due, ne avviene che un eſponente di quella non ſi trova in queſto che in un poſto la metà meno avanzato; e perciò l'eſponente del termine n di quella non ſi trova corriſpondere che a quello dell'$\frac{n}{2}$ di queſto. Quindi per avere l'eſpreſſioni generali de' termini contigui $n, n+1$ dell'equazione biſogna ſupporre $n=2n'$ nel riſpettivo termine ge-

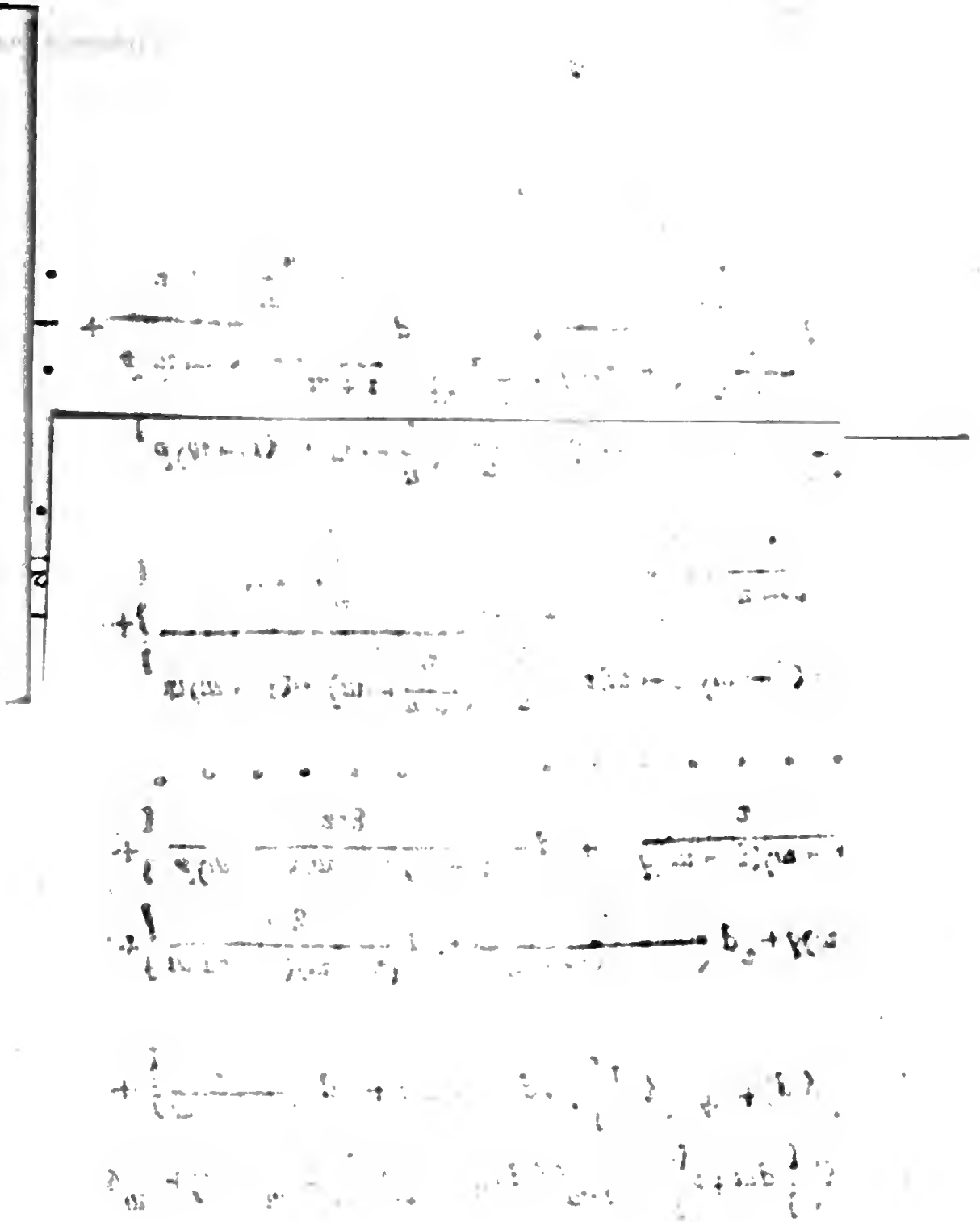
nerale di x^m, x^{m-1}, di x^{m-2}, x^{m-3}, di x^{m-4}, x^{m-5}, ec. avendo prima praticato la modificazione notata nella prima offervazione. Sostituiamo adunque dietro a tali offervazioni i notati valori nel equazion propoſta, e ne avremo in generale la trasformata, che ſi vede ſteſa nella quì annessa tavola.

$$(p:y)^{m-5}\Big|_{1}^{1}$$

$$p^{\quad} \quad +\ldots r\Big)_{j}^{j}\Big|_{1}^{1} y^{s} \quad + (p:y)^{s}\Big|_{1}^{1}$$

$$3)\ldots\frac{\frac{m}{2}}{\frac{m-4}{2}} p \quad +\ldots v\Big)_{j}^{f}\Big|_{1}^{1} y+p:y\Big|_{1}^{1}$$

$$\ldots\frac{\frac{m}{2}}{\frac{m-2}{2}} \frac{m-2}{2} p \quad +\ldots:pr+s = 0$$



137 Offervando queſta trasformata io mi avvergo che facendone ſvanire tutti i termini intermedj, e notando con q il ſuo ultimo termine, ne avremo l'equazione $y^m + (\frac{p}{y})^m + q = o$.

Queſta equazione, cioè la $y^{2m} + qy^m + p^m = o$, non è che una equazione derivata dal ſecondo grado. Se viſi ſuppone perciò $y^m = z$, cioè ſe ſi aſſume l'equazione $y^m - z = o$, ſene avrà la

$z^2 + qz + p^m = o$: donde $z = -\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{q^2}{4} - p^m)}$.

Se ſi rifletta quindi che le radici dell' equazione $y^m - z = o$ ſono eſpreſſe (326) dalla formula generale

$$y = \sqrt[m]{z} \left(\text{cof.}\frac{2ci}{m} \pm \text{ſen.}\frac{2ci}{m}\sqrt{-1} \right) = \left\{ \begin{matrix} \\ j \end{matrix} \right. - \frac{q}{2} \pm$$

$$\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - p^m)} \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{m} \\ j \end{matrix} \right. \left\{ \begin{matrix} \\ j \end{matrix} \right. \text{cof.}\frac{2ci}{m} \pm \text{ſen.}\frac{2ci}{m}\sqrt{-1} \left\{ \begin{matrix} \\ j \end{matrix} \right.$$

e ſi avverte come abbiamo notato (111) che non ſi cerca in queſto luogo di aſſegnar le radici in

queſtione, ma di ſcoprirne ſoltanto il carattere, e che pertanto poſſiamo permetterci l'introdurre in un trattato algebrico dell'equazioni un'eſpreſſione trigonometrica, avremo tutte le radici di cui ſi tratta generalmente eſpreſſe dalla formula $x\left(=y+\frac{p}{y}\right)=\left\{\begin{matrix}\\ \\ \\ j\end{matrix}\right.\cos.\frac{2ci}{m}\pm$

$$\text{sen.}\frac{2ci}{m}\sqrt{-1}\left\{\begin{matrix}\\ \\ j\end{matrix}\right.-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-p^m\right)}\left\{\begin{matrix}\\ \\ j\end{matrix}\right.^{\frac{1}{m}}+$$

$$\left\{\begin{matrix}\\ \\ j\end{matrix}\right.\cos\frac{2ci}{m}\mp\text{sen.}\frac{2ci}{m}\sqrt{-1}\left\{\begin{matrix}\\ \\ j\end{matrix}\right.-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-p^m\right)}\left\{\begin{matrix}\\ \\ j\end{matrix}\right.^{\frac{1}{m}}$$

eſpreſſe cioè dalla formula Cardanica preſentata ſotto la veduta di tutta la generalità di cui eſſa è capace: ed avremo perciò da conchiudere che facendo $=o$ tutti i detti termini intermedj, ſi avranno tante equazioni quanti ſono i coefficienti indeterminati dell'aſſunta equazione, e che determinando con eſſe queſti coefficienti, ſi avrà in generale la formula di tutte l'equazioni che ammettono per radice quella del Cardano. Facciamo adunque $=o$ queſti termini intermedj, e vegiamone l'equazioni che ne riſultano diſpoſte nel piano della ſeguente tavola.

$$a' = 0$$

$$a + mp = 0$$

$$a^2(m-1)p + b$$

$$\frac{m(m-1)}{2} p^2$$

$$\frac{a^2(m-1)(m-}{2}$$

$$\frac{m(m-1)(m-}{2.3}$$

$$\frac{a^2(m-1)(m-}{2.}$$

. . .

$$\frac{m(m-1)..\left(.(m-\frac{n+2}{2}\right)\frac{n-4}{2}}{2...\frac{n-4}{2}} p \quad +...h = a$$

$$\frac{a^2(m-1)...(}{2...\frac{n}{2}} \frac{n-4}{2} p \quad +...k' = 0$$

ec.

ec.

VITTORIO EMANUELE III° - BIBLIOTECA NAZIONALE - NAPOLI

138. Queste equazioni ci danno mercè l' eliminazione e l' analogia i valori de' coefficienti dell'assunta equazione; ci danno cioè

$$a' = b' = c' = d' = \ldots = h' = \ldots = r \text{ (ovvero) } v = 0$$

ed

$$a = -mp$$

$$b = \frac{m(m-3)}{2}p^2$$

$$c = -\frac{m(m-4)(m-5)}{2.3}p^3$$

$$d = \frac{m(m-5)(m-6)(m-7)}{2.3.4}p^4$$

$$e = -\frac{m(m-6)(m-7)(m-8)(m-9)}{2.3.4.5}p^5$$

$$f = \frac{m(m-7)(m-8)(m-9)(m-10)(m-11)}{2.3.4.5.6}p^6$$

. . . . . .

$$h = \pm \frac{m\left(m-\frac{n+2}{2}\right)\left(m-\frac{n+4}{2}\right)\ldots(m-n+1)}{2.3\ldots\frac{n}{2}}p^{\frac{n}{2}}$$

(secondo che $\frac{n}{2}$ è pari o impari)

$$v = \pm \frac{m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-3}{2} \cdot \frac{m-5}{2} \cdots 2 \; p^{\frac{m-1}{2}}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots \frac{m-1}{2}} = \pm m p^{\frac{m-1}{2}}$$

(secondo che $\frac{m-1}{2}$ è pari o impari)

(ovvero)

$$v = \pm \frac{m \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{m-2}{2} \cdot \frac{m-4}{2} \cdots 3 \; p^{\frac{m-2}{2}}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots \frac{m-2}{2}} = \pm \frac{m}{4} p^{\frac{m-2}{2}}$$

(secondo che $\frac{m}{2}$ è pari o impari)

139. Quindi la formula generale d' assegnarsi per l'equazioni Cardaniche si è per m impari

$$x^m - mpx^{m-2} + \frac{m(m-3)}{2} p^2 x^{m-4}$$

$$- \frac{m(m-4)(m-5)}{2 \cdot 3} p^3 x^{m-6} + \ldots\ldots$$

$$\ldots \pm \frac{m(m-n-1)(m-n-2) \cdots (m-2n+1)}{2 \cdot 3 \cdots n} p^n x^{m-2n} \mp$$

$$\ldots \pm mp^{\frac{m-1}{2}} x \text{ (sec. che } \frac{m-1}{2} \text{ è pari o impari)} + t = 0$$

in cui n è il numero de' termini che in essa precede un dato termine; ed essendo in questo caso $q = 1$, sarà $x =$

$$\left(\cos.\frac{2ci}{m} \pm \sqrt{-1}\,\text{sen.}\,\frac{2ci}{m}\right)\sqrt[m]{-\frac{t}{2}+\sqrt{\left(\frac{t^2}{4}-p^m\right)}}$$

$$+\left(\cos.\frac{2ci}{m} \mp \sqrt{-1}\,\text{sen.}\,\frac{2ci}{m}\right)\sqrt[m]{-\frac{t}{2}-\sqrt{\left(\frac{t^2}{4}-p^m\right)}}$$

la formula generale corrispondente delle sue radici.

140. Quindi la formola generale di assegnarsi per l'equazioni Cardaniche si è per m pari

$$x^m - mpx^{m-2} + \frac{m(m-3)}{2}p^2x^{m-4}$$

$$- \frac{m(m-4)(m-5)}{2.3}p^3x^{m-6} + \ldots$$

$$\ldots \pm \frac{m(m-n-1)(m-n-2)\ldots(m-2n+1)}{2.3.\ldots.n}p^n x^{m-2n} \mp \ldots$$

$$\ldots \mp \frac{m^2}{4}p^{\frac{m-2}{2}}x^2 \text{ (secondo che } m:2 \text{ è pari o im.}$$

pari) $+ t = 0$. Per averne quella delle ſue radici ſi rifletta che eſſa dipende dal valor di

$$q = \frac{m\ldots\frac{m+2}{2}}{2\ldots\frac{m}{2}} p^{\frac{m}{2}} + \frac{a(m-2)\ldots\frac{m}{2}}{2\ldots\frac{m-2}{2}} p^{\frac{m-2}{2}} + \ldots k$$

Per ſemplicizzare queſto valore io prendo l'indeterminata k e ſuppongo

$$\frac{m(m-1)\ldots\frac{m+2}{2}}{2\ldots\frac{m}{2}} p^{\frac{m}{2}} + \frac{a(m-2)\ldots\frac{m}{2}}{2\ldots\frac{m-2}{2}} p^{\frac{m-2}{2}} + \ldots k = 0$$

ſuppoſizione che mi dà $q = t - k$. Paragono queſta equazione colla (138)

$$\frac{n(n-1)\ldots\left(n-\frac{n-2}{2}\right)}{2\ldots\frac{n}{2}} p^{\frac{n}{2}} + \frac{a(n-2)(n-3)\ldots\left(n-\frac{n}{2}\right)}{2\ldots\frac{n-2}{2}} p^{\frac{n-2}{2}} + \ldots h = 0$$

, e ne ho $m = n$, $h = k$. Quindi mettendo m, k per n, h nel valor generale di h determinato per analogia (138), ſi avrà

$$k = \pm \frac{m \cdot \frac{m-2}{2} \cdot \frac{m-4}{2} \cdots 2}{2.3 \cdots \frac{m}{2}} \qquad p^{\frac{m}{2}} = \pm 2p$$

epperò $q = s - k = t \mp 2p^{\frac{m}{2}}$. Quindi

$$x = \left(\text{cos.}\frac{2ci}{m} \pm \text{sen.}\frac{2ci}{m}\sqrt{-1}\right)\sqrt[m]{\frac{t \mp 2p^{\frac{m}{2}}}{2}} +$$

$$\sqrt[m]{\left(\frac{1}{4}\left(t \mp 2p^{\frac{m}{2}}\right)^2 - p^m\right)} +$$

$$\left(\text{cos.}\frac{2ci}{m} \mp \text{sen.}\frac{2ci}{m}\sqrt{-1}\right)\sqrt[m]{\frac{t \mp 2p^{\frac{m}{2}}}{2}} -$$

$$\sqrt[m]{\left(\frac{1}{4}\left(t \mp 2p^{\frac{m}{2}}\right)^2 - p^m\right)}$$

farà la formula generale cercata delle radici dell'equazione corrispondente a questo caso.

141. Data un' equazione noi ſappiamo, per quanto ſi è detto, conoſcere dalla ſola ſua iſpezione ſe eſſa ammette o nò radice della forma Cardanica; ed ammettendola noi ſappiamo ſul campo aſſegnarla. L'argomento che a primo aſpetto ſi preſenta per queſta cognizione è quello, che eccettuato l'ultimo termine ne' ſoli gradi impari, eſſa dee ſempre mancare di tutti quei in poſto pari; che il coefficiente del ſecondo dee eſſere un multiplo del ſuo grado, e che eccetto l'ultimo termine i ſegni debbono alternare oppure eſſer tutti poſitivi ſecondo che p è poſitivo o negativo. Gli altri argomenti onde dell' intutto fiſſare tal conoſcenza riuſcirebbero aſſai inviluppati nell' eſpreſſione ſe vorremo tradurli nel linguaggio ordinario. Quindi contentandoci di averli eſpreſſi coll' eſpreſſione delle due formule generali già ſopra regiſtrate, paſſiamo a riflettere ſu quelle delle radici dell' equazione di cui ſi tratta, cioè ſulla formula Cardanica, Preſentata ſotto la veduta di tutta quella generalità di cui eſſa è capace.

142. Incomincio ad offervare che queſte due formule hanno la forma medeſima, ed in altro non conſiſte la lor differenza che il t nell' una tien luogo di $t \mp 2p^{\frac{m}{2}}$ nell' altra. Quindi le riflefſioni che faremo ſulla prima non poſſono differirſi nelle conſeguenze da quelle che han luogo per la ſeconda ſe non in ciò ſolamente che proviene da queſta differenza e da quella di eſſerne il grado impari o pari. Laſciando di notare nel numero ſeguente il prodotto combinato di queſte differenze paſſiamo ad indicare con $a \pm \sqrt{b}$ i due termini della radice in queſtione, e per maggior ſemplicità dell'eſpreſſione, a ſupporre i loro coefficienti numerici $\cos. \frac{2ci}{m} \pm \text{ſen.} \frac{2ci}{m} \sqrt{-1}$ $= f \pm h\sqrt{-1}$: onde avremo $x = (f \pm .. h\sqrt{-1})\, m\sqrt{(a+\sqrt{b})} + (f \pm h\sqrt{-1})^m \sqrt{(a-\sqrt{b})}$

Dopo ciò proſieguo ad offervare che il primo paſſo onde mettere più in veduta ed eſaminare

perciò più da vicino il carattere di questa formula si è quello di effettuire l' estrazione della radice m di $a \pm \sqrt{b}$. Il metodo esposto (110) onde avere in termini finiti questa radice non ha luogo che in un caso particolare, nel caso cioè in cui l'equazione (c) che è la stessa della proposta, ha radici razionali. Per mantenerci quindi nella generalità ed abbracciare colle nostre conclusioni tutti i casi di cui la questione è capace, io ricorro all'estrazione per serie; ed ho perciò

$$\sqrt[m]{(a \pm \sqrt{b})} = \sqrt[m]{a}\left(1 \pm \frac{\sqrt{b}}{am} \mp \frac{(m-1)\sqrt{b}}{2am}\right.$$

$$+\frac{(m-1)(2m-1)b}{2.3a^2m^2} \mp \frac{(m-1)(2m-1)(3m-)b\sqrt{b}}{2.3.4\,a^3m^3}$$

$$\left. +\frac{(m-1)(2m-1)(3m-1)(4m-1)b^2}{2.3\,4.5\,a^4m^4} \mp \text{ec} \;\vdots\right)$$

e quindi

$$x = 2^m\sqrt{a^l}\left\{f^{\frac{l}{j}}\left(1 - \frac{(m-1)b}{2a^2m^2} + \frac{(2m-1)(2m-1)b^2}{3\cdot4\,a^4m^4} - \right.\right.$$

$$\left. + \frac{(2m-1)(3m-1)(4m-1)(5m-1)b^2}{3\cdot4\cdot5\cdot6\,a^4m^4} + \text{ec.}\right)^{\frac{l}{j}}$$

$$\pm\frac{h\sqrt{-b}}{am}\left(1 + \frac{(m-1)(2m-1)b}{2\cdot3a^2m^2}\right.$$

$$\left. + \frac{(m-1)(2m-1)(2m-1)(4m-1)b^2}{2\cdot3\cdot4\cdot5\,a^4m^4} + \text{ec.}\right)$$

valore di x che in un caso particolare, come vedremo, non ha potuto sommarsi e ridursi a termini finiti.

143. Riflettendo ora sulle parti di questa nuova espressione di x, io relevo che i $2m$ valori in essa contenuti non sono in fondo che m, poichè i valori di c egualmente distanti da o ed m non danno per f che il medesimo valore, ed altra differenza non portano in quello di h che solamente nel segno; che gli m valori di essi sono tut-

ti ineguali, e $\sqrt[m]{a}$ è ſempre una quantità reale; e che finalmente $\sqrt{-b}$ può eſſere immaginaria nulla o reale ſecondo che $\frac{1}{4}t^2 \gtrless o$ di p^m. Quindi conchiudo che un' equazione della famiglia Cardanica avrà tutte ineguali le ſue radici; che eſſendo $\frac{1}{4}t^2 > p^m$ il valor di x riſulta immaginario fuori il caſo in cui c e però $h = o$, cioè che l' equazione ha una ſola radice reale tutte le altre eſſendo immaginarie; che eſſendo $\frac{1}{4}t^2 = p^m$ le radici dell' equazione propoſta ſaranno in tutti i caſi reali; che finalmente eſſendo $\frac{1}{4}t^2 < p^m$, e dippiù p poſitivo, tutte le radici ſaranno allora reali, poichè in queſto caſo b riſulta negativo.

144. Una circoſtanza ſingolare s' incontra in queſt' ultimo caſo; circoſtanza che lo ha reſo

memorabile nell' analiſi Carteſiana. In queſto caſo abbiam veduto che le radici dell'equazione ſono reali, e frattanto la formula

$x = (f+h\sqrt{-1})^{m}\sqrt{(a+\sqrt{-b})} + (f-h\sqrt{-1}) \times \ldots$

$m\sqrt{(a-\sqrt{-b})}$ che l' eſprime in generale ſi preſenta in tutti i caſi ſotto aſpetto immaginario. La riduzione di queſta eſpreſſione immaginaria a forma reale non ſi è ſaputo ottenere che per approſſimazione, ſia ricorrendo alle ſerie come ſopra (142) abbiam praticato, ſia col mezzo delle formule trigonometriche. Ma una riduzione per approſſimazione non è una riduzione rigoroſa e perfetta, una riduzione alla vera ſua forma. La formula Cardanica è un' eſpreſſione algebrica, un' eſpreſſione finita in tutti i caſi. Quindi un' eſpreſſione algebrica e finita ſarebbe la vera ſua riduzione: in queſta eſpreſſione algebrica e finita è che ſi avrebbe la riduzione alla vera ſua forma: e queſta eſpreſſione non differendo dalla formula ſteſſa Cardanica che nel ſolo eſſere ſpogliata dall' aſpetto immaginario, che non le appartiene, ci darebbe la riduzione perfetta la riduzione rigoroſa che ſi deſidera.

Vani ſono riuſciti i tentativi degli Analiſti, onde eſeguire queſta riduzione: locchè ha fatto chiamar queſto caſo, *Caſo irriducibile*. Ed il Cav. Lorgna nella ſua *Eſercitazione Analitica*, e quindi nelle Memorie (an.1782) della Società Italiana, ha creduto a ſufficienza provare per l'equazioni del terzo grado che vani riuſciranno ancora quegli altri che ſaranno per farſi ſul ſoggetto medeſimo. Per dare intanto un' idea di queſta prova ſull' irriducibilità ne vò ad eſporre in fondo i raziocinj dopo aver fiſſato però il carattere di queſto caſo famoſo. Se ci ricordiamo quanto abbiamo notato (116) che quando l'equazione (*c*) ha radici razionali, allora ſi può ſempre ottenere in termini finiti la radice m di $a \pm \sqrt{-b}$. Se quindi indichiamo con u, z due quantità razionali noi poſſiamo ſempre avere in queſto caſo $\sqrt[m]{(a \pm \sqrt{-b})} = (u \pm \sqrt{-z})\sqrt[m]{k}$, e però $x = ((u + \sqrt{-z}\,)(f + h\sqrt{-1}) + (u - \sqrt{-z}\,)(f - h\sqrt{-1}))\sqrt[m]{k} = 2\sqrt[m]{k}\,(fu + h\sqrt{z})$: avere cioè la formula in queſtione ſpogliata degl' immaginarj e ridotta a forma reale e finita. Il caſo

adunque in cui l'equazione propoſta ha radici razionali non và compreſo nel caſo irriducibile. Il caſo irriducibile ſuppone perciò che le radici dell'equazione ſieno reali, ineguali, ed irrazionali: donde avviene che ſe un'equazione oltre i caratteri notati (141) avrà reali ineguali ed irrazionali le ſue radici non ſolo ci porterà alla formula Cardanica, m'alla formula Cardanica eziandio nel caſo irriduicibile.

145. Un altro carattere oltre i notati onde un'equazione ſia indiſpenſabilmente nel caſo irriducibile è quello che i ſuoi coefficienti ſieno tutti razionali. Il non avvertire a queſto carattere ha fatto cadere in inganno molti analiſti, ed a fatto riguardar loro molte equazioni che ne erano mancanti come tanti caſi, giuſta la fraſe dell'Encicopledíſta, rapiti all'irriducibilità. Se in queſt' equazioni irrazionali, in apparenza irriducibili, ſi toglie ogni irrazionalità e ſi riducono alla forma della propoſta; ecco che ſvaniſce tutta l'illuſione della loro irriducibità. Il Cav. Lorgna lo ha fatto vedere nella *Eſerc. Anal.*; delle cui rifleſſioni non poſſo proſittare per non aver alle mani queſta ſua ope-

ra . E noi lo faremo vedere più ſotto in un applicazione. Ma eſponiamo prima la ſomma della dimoſtrazione Lorgniana ſull' impoſſibilità di ſciogliere il nodo dell' irriducibilità.

146. Supponiamo poſſibile la riduzione di cui ſi tratta e veggiamo dalle concluſioni cui queſta ſuppoſizione ci porta di ricavarne una di quelle pruove, che ſi dicono negative in quanto negano qualche provata condizione . Notando con d la funzione algebrica e finita che ſi ottiene colla ſuppoſta riduzione, e rifletendo che il prendere $\sqrt[m]{(a\pm\sqrt{-b})}$ o $(f\pm k\sqrt{-1})\sqrt[m]{(a\pm\sqrt{-b})}$ è un' iſteſſa coſa, in quanto ambedue non eſprimono che le ſteſſe m radici di $a\pm\sqrt{-b}$, avremo $\sqrt[m]{(a+\sqrt{-b})}+\sqrt[m]{(a-\sqrt{-b})}=d$. Oſſervo poi così di paſſaggio che le radici m di $a\pm\sqrt{-b}$ non ſono che tutte funzioni dell' incognita che ſi determina riſolvendo l'equazione (c): incognita che per la medeſimezza in queſto caſo dell' equazione (c) colla propoſta non può aver per valore che un

funzione di t, p. Quindi la funzione d qua unque essa sia non può essere che una funzione di t, o p solo, oppure di t, e p presi insieme. Dopo questa osservazione io prendo l'equazione di suppositione $\sqrt[m]{(a+\sqrt{-b})}+\sqrt[m]{(a-\sqrt{-b})} = d$, e ne divido, e moltiplico nello stesso tempo per il primo il secondo termine del primo membro onde l'avrò trasformata nella

$$\left(\sqrt[m]{(a+\sqrt{-b})}\right)^2 - d\sqrt[m]{(a+\sqrt{-b})} = -\sqrt[m]{(a^2+b)} = -p;$$

che risoluta co' metodi consueti mi dà $\sqrt[m]{(a+\sqrt{-b})} = \frac{1}{2}(d \pm \sqrt{(d^2-4p)})$

risultato che dee avverarsi in tutte le condizioni annesse al caso di cui si tratta ond'essere possibile la proposta riduzione. Interroghiamo adunque questo risultato, e sentiamo la risposta che esso ci dà col linguaggio della sua espressione.

147. Se fissiamo lo sguardo sull' espressione di questo risultato chiaramente leggeremo che per

eſſer poſſibile la ſuppoſta riduzione uop' è che $a+\sqrt{-b}$ abbia per radice m una funzione di d della forma $\frac{1}{2}(d\pm\sqrt{(d^2-4p)})$. Se riflettiamo ſulla forma di queſta funzione prontamente rileveremo eſſer quell' iſteſſa che noi abbiamo (110) fiſſato per la radice m di $a+\sqrt{-b}$, e conchiuderemo perciò che eſſa dee andar ſoggetta a quelle condizioni medeſime onde abbiamo dedotto la poſſibilità di quella eſtrazione. Se richiamiamo infine ſu di queſta funzione quanto dicemmo in quel numero facilmente ricaveremo dall' equazione (*b*) che $\sqrt{(d^2-4p)}$ è immaginario, come dee eſſere onde il riſultato $\sqrt[m]{(a+\sqrt{-b})}=\frac{1}{2}(d\pm\sqrt{(d^2-4p)})$, di cui ſtiamo all' eſame, ſia legittimo e niente completta di aſſurdo, donde potrem conchiuderne la proprietà generale dell' equazioni a radici tutte reali ed ineguali che il quadrato di una qualunque di queſte radici è ſempre minore del quadruplo della ſomma di tutti i loro bini pro-

dotti diviſo per l'eſponente maſſimo dell' equazione; e ricaveremo dippiù facilmente che d dee eſſer non ſolo una quantità razionale, ma eſſere ancora radice dell' equazione (c) che in queſto caſo, come abbiamo ſopra notato, è l'iſteſſa dell' equazione propoſta, ed è perciò un' equazione nel caſo irriducibile. Quindi eſſendo condizione del caſo irriducibile che l'equazione propoſta abbia tutte irrazionali le ſue radici, ne avviene che l' argomento che la ſuppoſta riduzione ci ha dato nel riſultato $\sqrt[m]{(a+\sqrt{-b})} = \frac{1}{2}(d \pm \sqrt{(d^2-4p)})$, di dover eſſere cioè d razionale, è un argomento tutto contrario al carattere diſtintivo dell'irriducibilità, ed è perciò un argomento che nega la ſuppoſta riduzione $\sqrt[m]{(a+\sqrt{-b})} + \sqrt[m]{(a-\sqrt{-b})}$ a d. Ma ſiccome noi abbiamo eſpreſſo con d una funzione qualunque ſia poſſibile ed immaginabile: ſiccome non abbiamo ſottopoſto tal ſuppoſizione ad alcuna condizione particolare, ma l' abbiamo preſa bensì in tutta l'eſtenſione della generalità; così uop' è conchiudere che le radi-

ci dell' equazioni Cardaniche nel caso irriducibile non possono con qualunque immaginabile metodo spogliarsi dell'aspetto immaginario in cui son presentate, e ridursi alla vera lor forma reale algebrica finita.

148 Questi sono in fondo i raziocinj co' quali il Loigna ha creduto troncare ogni nuova ricerca sulla riducibilità del caso irriducibile, e co' quali si è creduto in dritto di dichiarar cavilloso, e disonorante l'analisi, quell'analista che sarà per mettere in dubbio l' irriducibilità in questione. Io senza fermarmi sopra di essi, ma sol contentandomi di averne abbozzato un quadro co' materiali però che le teorie di questo mio libro mi hanno presentato i più pronti, passo a mostrar come la trigonometria ci viene in questo caso a soccorrere in farci prontamente trovare esatte o approssimate le radici che per l' ordinario l' analisi pura ci dà per vie molto laboriose, e molto lunghe.

149. Io prendo (1.735.) a tale oggetto dalla trigonometria analitica l'equazione

$$\text{cos.}^m a - \frac{m(m-1)}{2}\,\text{cos.}^{m-2} a\,\text{sen.}^2 a +$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot 3\cdot 4}\,\text{cos.}^{m-4} a\,\text{sen.}^4 a -$$

$$\ldots \pm \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{2\ldots n}\,\text{cos.}^{m-n} a\,\text{sen.}^n a + \text{ec.}$$

$$= \text{cos.}^m a + \frac{m(m-1)}{2}\,\text{cos.}^{m-2} a(\text{cos.}^2 a - 1) +$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot 3\cdot 4}\text{cos.}^{m-4} a(\text{cos.}^2 a - 1)^2$$

$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{2\ldots n}\text{cos.}^{m-n} a(\text{cos.}^2 a - 1)^{\frac{n}{2}} \text{ec.}$$

$= \text{cos.} ma$, ed offervo che effa è perfettamente fimile alla (*c*) del num. 116. Trattando quindi come alla (*c*) queſta equazione, arriveremo certamente ad averla ſotto l' eſpreſſione

$$(2\text{cos.}a)^m - m\,(2\text{cos.}a)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{2}(2\text{cos.}a)^{m-4}$$

$$\frac{m(m-4)(m-5)}{2\cdot 3}(2\text{cos.}a)^{m-6} + \text{ec.} = 2\text{cos.}ma$$

(ovvero)

$$\text{cos.}^m a - \frac{m}{2^2}\text{cos.}^{m-2} a + \frac{m(m-2)}{2^4 2}\text{cos.}^{m-4} a -$$

$$\frac{m(m-4)(m-5)}{2^6 2.3}\text{cos.}^{m-6} a + \text{ec.} - \frac{\text{cos.}ma}{2^{m-1}} = 0$$

Queſta equazione che appartiene alla famiglia delle Cardaniche non comprende però ſotto la ſua eſpreſſione ſe non quelle ſoltanto che ci danno ſotto aſpetto immaginario le loro radici quantunque reali; poichè paragonandola colla generale del numero 139 abbiamo $p = \frac{1}{2^2}$, $t = -\frac{\text{cos.}ma}{2^{m-1}}$, e perciò $\frac{1}{4}t^2 \left(= \frac{\text{cos}^2 ma}{2^{2m}}\right) < p^m \left(= \frac{1}{2^{2m}}\right)$.

Queſta equazione ci viene in ſoccorſo per farci prontamente trovare eſatte, o approſſimate le radici di tutte l'equazioni irriducibili.

Per vederne la maniera baſta rifletrere che l'oggetto della ſoluzione di queſta equazione non è che di trovare gli m valori di cos.a cioè dell'

incognita. La trigonometria ci dà ſenza ricorrere a ſoluzione analitica queſti valori; poichè conoſcendo ſempre il valor di cos.ma, che ſi ha col paragonarlo al termine cognito dell'equazione propoſta, ſi ottiene dalle tavole quello di ma, e poi quello di a e di cos.a: inoltre tutti i valori poſſibili di cos.ma eſſendo tutti compreſi (l.7 10.) nell'eſpreſſion delle formule, cos.$(2ci \pm ma)$, $-\cos.((2c+1)i \pm ma)$ tutti quelli di cos.a lo ſaranno in quella delle formule cos.$(\frac{2ci}{m} \pm a)$, $-\cos.(\frac{2c+1}{m} i \pm a)$: ecco con quale facilità e con quale prontezza ci da le radici di cui ſi tratta, e come ci riſparmia perciò la fatiga di laborioſiſſimi calcoli in cui ſovente s'impegna l'analiſi pura.

Pria di paſſare a qualche applicazione debbo avvertire che dopo l'impreſſione del num. 133 trovai per caſo nel calcolo del Lacroix un cenno che mi fa dubitare di eſſere ſtato io il primo a concepire l'idea di queſto metodo trigonometrico, che mi trovava in quel numero annunciato aſſolutamente per nuovo. Ciò vaglia a non crederſi che io voglia attribuirmi la pri-

ma idea di un metodo di cui altri avranno forse parlato: metodo però che quantunque si trovasse altrove trattato potrò frattanto, insieme a molte altre teorie di questo libro, attribuirmi per averlo concepito esteso ed applicato senza alcuna notizia.

150. Per prima applicazione io prendo l'equazione

$$x^3 - 3r^2x + r^3\sqrt{2} = 0,$$

che M. Nicole (Mem. Accad. 1740) ha trovato per la trisezione dell'arco di 90°, e che si è riguardata come uno de' casi rapiti all'irriducibilità. Paragonando questa equazione colla generale de' gradi impari avremo

$$x = \frac{r}{6\sqrt{2}}\left(\sqrt[3]{(-1+\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(-1-\sqrt{-1})}\right)$$

Il metodo (109) ci dà $\sqrt[3]{(-1\pm\sqrt{-1})} = \ldots$

$\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt[3]{2}}$ epperò $x = r\sqrt{2}$. Dividendo per

queſta radice l'equazione propoſta ſene avrà una del ſecondo grado che ci darà

$x = \pm \frac{r}{\sqrt{2}} (\sqrt{3} \mp 1)$ per le altre due. Quindi ſi è conchiuſo che quantunque l'equazion propoſta abbia reali ineguali irrazionali le ſue radici, frattanto la formula Cardanica ſotto aſpetto immaginario ſi è trovata ſuſcettibile di riduzione; e ſi è creduto perciò vedere in queſta equazione un caſo affolutamente rapito all'irriducibilità.

151. Un caſo veramente rapito all'irriducibilità ſarebbe queſto ſe fra i caratteri del caſo irriducibile non ſi trovaſſe quello, di cui il Lorgna ci ha il primo prevenuti, cioè di dover eſſere razionale l'equazione. La propoſta equazione non appartiene che in apparenza alla claſſe delle irriducibili. Se da eſſa leviamo via ogni irrazionalità; ecco che la vedremo aſcritta non più nelle irriducibili, ma nella claſſe bensì delle riducibili. Levando in fatti queſta irrazionalità ne avremo l'equazione

$$(x^2)^3 - 6r^2(x^2)^2 + 6r^4x^2 - 2r^6 = 0,$$

in cui ſupponendo $x^2 = z + 2r^2$ onde levarvi il ſecondo termine e ridurla alla forma della propoſta ne avremo la $z^3 - 3r^4z = 0$; che è un equazione riducibile e non mai irriducibile; che ha $z = 0$, $z = \pm r^2\sqrt{3}$ per radici; e che finalmente ci dà

$$x = r\sqrt{2},\ x = r\sqrt{(2 \pm \sqrt{3})} = (109) \pm \frac{r}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} \mp 1)$$

per quelle della propoſta.

152. Per ſeconda applicazione prendo l'equazione $x^4 - 16x^2 + 16 = 0$, la quale paragonata colla generale de' gradi pari mi dà $p = 4, t = 16$ e per eſſere $\frac{m}{2} = 2$ un numero pari, mi dà

$$z - 2p^{\frac{m}{2}} = -16, \text{ e quindi}$$

$$x = \sqrt[4]{8}\left(\sqrt[4]{(1+\sqrt{-3})} + \sqrt[4]{(1-\sqrt{-3})}\right):$$

valore ſotto aſpetto immaginario: valore dei di

cui termini, trattati col metodo (110.), non ſe. ne può eſtrarre la radice: valore che per eſſere razionale l'equazione, e reali ineguali irrazionali le ſue radici non ſi può ſpogliare di queſto aſpetto e ridurſi a forma reale algebrica finita: valore finalmente che può aſſegnarſi, come abbiamo notato, e colle ſerie e col ſoccorſo della trigonometria. Noi ricorriamo a queſta onde dare un' applicazione del metodo eſpoſto (149)

153. Tutti i valori di cof.a eſſendo generalmente eſpreſſi dalle formule

$$\text{cof.}\left(\frac{2ci}{m} \pm a\right), \quad -\text{cof.}\left(\frac{(2c+1)i}{m} \pm a\right),$$

ſaranno per l'equazioni del quarto grado

$\pm$ cof.a, $\pm$ ſen.a, $\pm$ cof$(45^\circ + a)$, $\pm$ cof.$(45^\circ - a)$.

Se chiamo poi r il raggio, e paragono la propoſta coll'equazione del numero (149) ne avrò

$\left(\frac{r}{2}\right)^2 = 4$, cioè $r = 4$, e cof.$4a = -\left(\frac{2}{r}\right)^3 \cdot 16 =$

$-2 = -\frac{r}{2} = -$cof. 60°, cioè $a = 30^\circ = 60^\circ$,

Quindi i valori approſſimati di x ſono

$$\pm \text{cof.}30^\circ, \pm \text{ſen.}30^\circ, \pm \text{ſen.}15^\circ, \pm \text{cof.}15^\circ,$$

cioè ridotti in parti del raggio

$$r = 4, \pm 4\,\text{cof.}30^\circ, \pm 4\,\text{ſen.}30^\circ,$$

$$\pm 4\,\text{ſen.}15^\circ, \pm 4\,\text{cof.}15^\circ, \text{ cioè } \pm 2\sqrt{3},$$

$$\pm 2, \pm 1{,}0353, \pm 3{,}8637.$$

Queſti due ultimi ſono quelli però che molto ſi avvicinano al valor vero di x; mentre i primi ne ſon molto diſtanti. Soſtituiti quelli in effetto per x nell' equazione propoſta non ſi troverà 0,001 di errore.

PROBL. 34.

Dimoſtrare i teoremi de' numeri (l. 394. 395)

154. Io tralaſcio di traſcrivere i ſenſi dei teoremi enunciati, poichè nel progreſſo di queſto dettaglio ſi arriverà a ſcoprire in che eſſi conſiſtono.

Ogni equazione può trasformarſi in un'altra ſenza ſecondo termine; trasformazione che mai tralaſciaſi di praticare onde renderne vieppiù ſemplice la ſoluzione. Il metodo per arrivarvi

ne è purtroppo conoſciuto, ed io ſupponendo eſeguito ciò coll' autore delle lezioni, paſſo a prendere i due fattori componenti la propoſta (l. 393)

$$x^4 + tx^2 + qx + u = 0,$$

ſotto la forma

$$x^2 - mx\sqrt{n} + b \pm c\sqrt{n} = 0$$

$$x^2 + mx\sqrt{n} + b \mp c\sqrt{n} = 0,$$

il di cui prodotto dà, giuſta la fraſe dell' autore, l'equazione compoſtiſſima

$$x^4 + (2b - m^2 n)x^2 \mp 2cmnx + b^2 - c^2 n = 0.$$

Suppongo quindi eguale a zero, nulla, una, o due delle quantità m, b, c, onde averne tutti i caſi poſſibili; ſuppoſizione che mi dà i ſette caſi, che io diſpongo nella ſeguente tavola

I.

$x^4 + (2b - m^2 n)\ x^2 \mp 2cmnx + b^2 - c^2 n = 0$

$t = 2b - m^2 n \ldots q = \mp 2cmn \ldots u = b^2 - c^2 n$

II . . . $b = 0$

$x^4 - m^2 n\, x^2 \mp 2cmnx - c^2 n = 0 \ldots t = -m^2 n$

$q = \mp 2cmn \ldots u = -c^2 n$

III . . . $c = 0$

$x^4 + (2b - m^2 n)x^2 + b^2 = 0 \ldots t = 2b - m^2 n$

$q = 0 \ldots u = b^2$

IV . . . $m = 0$

$x^4 + 2bx^2 + b^2 - c^2 n = 0 \ldots t = 2b \ldots q = 0$

$u = b^2 - c^2 n$

V . . . $b = c = 0$

$x^4 - m^2 nx^2 = 0 \ldots t = -m^2 n \ldots q = 0 \ldots u = 0$

VI . . . $b = m = 0$

$x^4 - c^2 n = 0 \ldots t = 0 \ldots q = 0 \ldots u = -c^2 n$

VII . . $c = m = 0$

$x^4 + 2bx^2 + b^2 = 0 \ldots t = 2b \ldots q = 0 \ldots u = b^2$

155. Se arrivo a determinare i fattori di queſte ſette equazioni eſpreſſi in parti de'coefficienti della propoſta, ne avrò in un modo generale quelli di qualunque equazione che ſi potrà proporre del quarto grado: comincio a

tale oggetto ad offervare che le III. IV. ſono ambedue derivate dal ſecondo grado; che la V è immnue di affezione zero lineare cubica; che la VI è pura; e che la VII è un quadro perfetto. Quindi ſene vedono a primo ſguardo i di loro fattori. Paſſo adunque ad offervare le I, II, e veggo che la I è l'equazione riſultata dal prodotto degli aſſunti fattori, e che però eſſi ſono quelli che le appartengono, e che gli ultimi tre termini della II ſono il prodotto di n per un quadrato perfetto, e però mettendola ſotto la forma $x^4 = n(mx \pm c)^2$ ci dà

$$x^2 + mx\sqrt{n} \pm c\sqrt{n} = 0, \quad x^2 - mx\sqrt{n} \mp c\sqrt{n} = 0$$

pe' ſuoi fattori. Per eſprimere poi queſti fattori in parte de' coefficienti t, q, u della propoſta onde averli dalla ſola ſua iſpezione, offervo che i valori riſpettivi di t, q, u preſi dalla tavola (154), e combinati fra loro mi danno per la

I... $m = \mp \dfrac{2c(2b - t)}{q}$, $n = \dfrac{q^2}{4c^2(2b - t)}$,

$$2b - t = \frac{q^2}{4(b^2 - u)}$$

e per la II.. $m = \pm\frac{2ct}{q}$, $n = -\frac{q^2}{4c^2t}$, $t = \frac{q^2}{4u}$;

osservo dippiù che b non è che la parte intera razionale del termine conosciuto, e che perciò la noto con E. Quindi mettendo tutti questi valori ne' fattori trovati per le I. II. ne avrò i due teoremi enunciati, cioè se nell' equazione $x^3 + tx^2 + qx + u = 0$ sarà $t = \frac{q^2}{4u}$

i suoi due fattori saranno

$$x^2 + x\sqrt{-t} \pm \sqrt{-u} = 0$$
$$x^2 + x\sqrt{-t} \mp \sqrt{-u} = 0,$$

e se sarà $2E - t = \frac{q^2}{4(E^2 - u)}$,

si avranno sotto la forma

$$x^2 - x\sqrt{(2E - t)} + E \pm \sqrt{(E^2 - u)} = 0$$
$$x^2 + x\sqrt{(2E - t)} + E \mp \sqrt{(E^2 - u)} = 0$$

156. Si avverta pria di finire che il nu-

mero E si determina mercè l'equazione $2E - t = \frac{-q^2}{4(E^2-u)}$, cioè $E^3 - \frac{1}{2}tE^2 - uE - \frac{q^2-4ut}{8} = 0$ equazione che dall' avere o nò delle radici razionali intere, determina l'affermativa o negativa applicazione del metodo al caso proposto nel teorema secondo.

PROBL. 35.

Risolvere l' equazioni

$x^4 + 6x^2 - 12x + 6 = 0$, ed $x^4 - 18x^2 + 25x + 6 = 0$.

158. Per rispondere alla proposta questione, entro ad esaminare se il metodo di cui abbiamo parlato nel problema precedente vi ha luogo di applicazione. Trovo con questo esame che la prima dalle due equazioni enunciate soddisfa all' equazione di condizione $t = \frac{q^2}{4u}$, e che la seconda non adempie ne a questa nè alla $2E - t = \frac{q^2}{4(E^2-u)}$, cioè nel nostro caso alla

$E^3+9E^2-6E-\frac{1057}{8}=0$, poichè niun valore di E può ridurla a zero. Quindi conchiudo che $x^2\mp x\sqrt{-6}\pm\sqrt{-6}=0$ ſono i fattori della prima, e che fa duopo rieorrere ad altro metodo, onde averne quei della ſeconda.

159 Vi tento però il metodo de' fattori razionali, e la ſuppongo formata dal prodotto di

$$x^2+ax+b=0 \text{ per } x^2+ax+c=0,$$

ciéè la ſuppongo della ſorma

$$x^4+(b+c-a^2)x^2-a(b-c)x+bc=0.$$

Il paragone di due equazioni le di cui rădici ſi ſuppongono le ſteſſe non dee farſi che termine con termine, poichè la ſomma ſemplice di eſſe radici, quella de' ſuoi bini, terni, ec. prodotti è ſempre eguale in ambedue. Quindi ho

$$b+c-a^2=-18,\ a(b-c)=-25,\ bc=6,$$

e però $b=\frac{a^2-18a-25}{2a}$, $c=\frac{a^2-18a+25}{2a}$, ed

$a^6-36a^4+300a^2-625=0$. Il tutto dipende nel cavar da queſt' ultima il valore di a. Per

venirne a capo pongo $a^2 = z$, onde avrò $z^3 - 36z^2 + 300z - 625 = 0$. Offervo poi che a dee effere per condizione razionale, e che però il valor di z dee efferne un quadrato perfetto. Quindi fra i fattori 1, 5, 25, 125, 625 dell' ultimo termine ne prendo il quadrato 25 onde averne $a = 5$, e però $b = 1$, $c = 6$, e finalmente $x^2 - 5x + 6 = 0$, $x^2 + 5x + 1 = 0$ pe' fattori cercati della ſeconda equazione delle due enunciate.

160. Mettendo termine a queſta ſoluzione io debbo avvertire che l'eſſere riſultati imaginarj i fattori del ſecondo grado

$$x^2 \pm x\sqrt{-6} \mp \sqrt{-6} = 0$$

della prima delle propoſte due equazioni non dee farci argomentare che eſſa non ne ha de' reali. Ogni equazione di grado parì è ſempre ſcomponibile in fattori reali del ſecondo. Queſto teorema è ſtato in maniere diverſe dimoſtrato. Io mi trattengo ſopra di eſſo un momento, onde convincere in generale ſu di quanto ho dovuto avvertire ſull'equazione enunciata in

particolare; onde provare con esso la proposizione d'Alembertiana sulle radici imaginarie che ho dovuto citar (91); onde darne una dimostrazione assai semplice e piana: dimostrazione che rassomigliando a quella che Laplace ha dato nel giornale della scuola normale ne è più semplice però più generale ed esente dalla dipendenza de' due teoremi da cui la tira quel sommo geometra, e da cui se non m' inganno (perchè il nome famoso del Laplace me ne fa purtroppo temere) mi sembra tutta indipendente

Si noti con r, r' due radici qualunque di un'equazione di grado m, che chiamo (A) e si avrà $(a)\ x^2-(r+r')x+rr'=0$ per l'espressione generale de' suoi fattori doppj: L'equazione (A) è chiaro che avrà tanti fattori reali di secondo grado quanti saranno i valori reali di $r+r'$ ed rr'. Per determinare questi fattori basta fissare in generale per tutte le radici in questione il valore di queste quantità. Per fissare questo valore basta conoscere due equazioni che le complettano come due incognite. Per assegnare nel modo più semplice

queſte due equazioni baſta prenderle della forma

$$r+r'+prr'=q,\quad r+r'+p'rr'=q'$$

Se noi avremo il modo di conoſcere queſte due equazioni onde cavarne i valori di $r+r'$, e di rr'; ſe noi otterremo uno o più valori reali che ſiſtituiti in (*a*) ci danno uno o più riſultati reali, è chiaro che l'equazione (*A*) avrà ſempre uno o più fattori doppj reali. Or la conoſcenza di queſte due equazioni è ſempre poſſibile. In effetto le bine combinazioni diverſe dell'm radici della (*A*) ſono $\frac{m(m-1)}{2}$.

Quindi ſupponendo $y=r+r'+prr'$ ſi avranno con tutte queſte radici $\frac{m(m-1)}{2}$ fattori della forma

$y-r-r'-prr'=0$; fattori che moltiplicati fra loro daranno un'equazione (*B*) del grado $\frac{m(m-1)}{2}$; equazione di cui i coefficienti non eſſendo, come abbiam veduto (82...88) per un caſo ſimile che delle funzioni ſimetriche delle radici della (*A*), e perciò ſapendo determinarſi in funzione di quei di queſta, ne avviene che ſempre ci ſia conoſciuta.

La funzione adunque $r+r'+prr'$ si ha sempre dalla nota equazione (B), e tanti saranno i suoi valori reali quante sono le radici reali di questa equazione.

Essendo p un' indeterminata introdotta senz' altra condizione che quella di essere reale, ed essendo perciò suscettibile di un'infinità di valori diversi, ne viene che colle radici r,r' della (A) potranno formarsi un' infinità di fattori compresi tutti nella formula generale.

$$y-r-r'-p^{n-1}rr'=0$$

e perciò potranno aversi un' infinità di equazioni del grado $\frac{m(m-1)}{2}$ in tutto simili alla (B), tutte conosciute, e che avranno sempre una o più radici reali quando una o più ne avrà la lor simile (B). Quindi se questa equazione (B) avrà una sola radice reale non solo si avrà uno ma un' infinità di valori reali per q. Quindi potendo aversi sempre in questo caso la conoscenza delle due equazioni.

$$r+r'+prr'=q,\ r+r'+p'rr'=q'$$

si avrà sempre egualmente per la (A) un fattore reale di secondo grado.

Se l'equazione (*B*) non ha radici reali ; allora essendo *y* immaginario; sapendo che una quantità immaginaria può essere mista con reale, e perciò essere della forma $f+g\sqrt{-1}$; riflettendo che le funzioni quanto composte esse sieno sono sempre il risultato delle operazioni fondamentali dell' algebra sulle funzioni semplici; osservando perfine che col sommare, sottrarre, moltiplicare, dividere, elevare a potenze sì intere che fratte, delle quantità della forma $f+g\sqrt{-1}$, si hanno de' risultati riducibili sempre alla forma $A+B\sqrt{-1}$: si resterà certamente convinto che in qualunque caso sarà sempre.

$$r+r'+pr'=n+h\sqrt{-1},\ r+r'+p'rr'=n'+h'\sqrt{-1}$$

epperò

$$r+r'=\frac{np'-n'p+(p'h+ph')\sqrt{-1}}{p'-p}=a+b\sqrt{-1}$$

$$rr'=\frac{n'-n+(h'-h)\sqrt{-1}}{p'-p}=a'+b'\sqrt{-1}$$

donde si avrà

$$(a) \equiv x^2 - (a + b\sqrt{-1})\, x + a' + b'\sqrt{-1} \equiv 0$$

Se divido ora l'equazione (A) per questo suo fattore imaginario, è chiaro che essendo essa reale mi dee dare un quoziente non solo imaginario, ma combinato ancora talmente quanto nel suo prodotto per esso fattore si elidano fra loro gl'imaginarj. Quindi, notando con f la parola funzione, è chiaro che l'equazione (A) risulta sempre dal prodotto di questo fattore per un altro della forma $fx + f'x\sqrt{-1}$ cioè che

$$(A) \equiv (x^2 - (a + b\sqrt{-1})x + a' \pm b'\sqrt{-1})(fx + f'x\sqrt{-1})$$

in cui le due funzioni fx, $f'x$ sono supposte tali quanto gl'imaginarj si annullano fra loro.

Osservando questa equazione io veggo che mutando ne' suoi due fattori i segni de' termini imaginarj, si ha sempre il medesimo risultato per quanto spetta alla parte reale, e che la parte imaginaria annullandosi nel primo nò può non annullarsi nel secondo prodotto. Quindi avviene che la (A) può riguardarsi come il prodotto tanto di

$x^2 - (a+b\sqrt{-1})x + a' + b'\sqrt{-1}$ per $fx + fx\sqrt{-1}$
quanto di
$x^2 - (a-b\sqrt{-1})x + a' - b'\sqrt{-1}$ per $fx - fx\sqrt{-1}$
cioè l'equazione (A) è divisibile esattamente per qualunque delle due formule

$$x^2 - (a \pm b\sqrt{-1})x + a' \pm b'\sqrt{-1}$$

cioè queste due formule sono fattori ambedue dell'equazione (A) Risolvendo questi due fattori ne' quattro semplici

$$x - \frac{1}{2}(a+b\sqrt{-1} + \sqrt{(c+d\sqrt{-1})}) = 0$$

$$x - \frac{1}{2}(a-b\sqrt{-1} + \sqrt{(c-d\sqrt{-1})}) = 0$$

$$x - \frac{1}{2}(a+b\sqrt{-1} - \sqrt{(c+d\sqrt{-1})}) = 0$$

$$x - \frac{1}{2}(a-b\sqrt{-1} - \sqrt{(c-d\sqrt{-1})}) = 0$$

(in cui si è supposto

$$a^2 - b^2 - 4a' = c, \quad 2(ab - 2b') = d)$$

formando i ſei bini prodotti che di eſſi ſene poſſono fare diverſi; ſene troveranno ſempre due che ſaranno reali. Per reſtarne convinti con una prova di fatto ſi multiplichino diviſamente fra loro i due primi, e i due ultimi, e ſene avranno i due prodotti

$$x^2 - ax \pm \frac{\mp 2r}{2}(\sqrt{(c+d\sqrt{-1})}+\sqrt{(c-d\sqrt{-1})})$$

$$\pm\frac{r}{2}\sqrt{-1}(\sqrt{(c+d\sqrt{-1})}-\sqrt{(c-d\sqrt{-1})})$$

$$+\frac{a^2+b^2}{4}+\sqrt{(c^2+d^2)}$$

prodotti in cui il terzo e quarto termine non eſſendo imaginarj che in apparenza, come facilmente ſi vede, ci convincono che l' equazione (*A*) contiene puranche in queſto caſo un fattore reale di ſecondo grado.

Quindi conchiudo che ſapendo ſempre aſſegnarſi, mercè i coefficienti della data equazione (*A*), le due equazioni

$$r+r'\mp pr'=q, r+r'+p'rr'=q'.$$

avendo da esse in tutti i casi per (*a*) un risultato almeno reale: conchiudo io dico che l'equazione (*A*) contiene sempre un fattore reale almeno di secondo grado.

Quindi se divido la (*A*) per questo fattore, ne avrò un' equazion-quoziente di grado pari o impari secondo che essa è pari o impari; equazion-quoziente che per le stesse ragioni, anche essa conterrà un fattore reale di secondo grado: se proseguo a dividere questa equazion quoziente per questo suo fattore ne avrò una seconda equazion-quoziente, che conterrà pur anche un fattore reale di secondo grado: se continuerò a dividere ogni nuova equazion-quoziente pel suo corrispondente fattore, arriverò finalmente ad un quoziente zero se la (*A*) è di grado pari, e ad un'equazion-quoziente di primo grado se essa è di grado impari; equazion-quoziente di primo grado che in tutti i casi è reale, come quì appresso vederemo.

Quindi essendo l'equazioni pari scomponibili esattamente in fattori reali di secondo grado, e le impari col dare un' equazion-quoziente reale di primo grado, ne avviene che le radici imaginarie debbono esistere in esse

non ſolo a coppie, m'a coppie tali eziandio che l'una eſſendo della forma $f+g\sqrt{-1}$ dee eſſere l'altra della forma $f-g\sqrt{-1}$: e ciò perchè ſotto tale condizione ſolamente è che il prodotto ne riſulta reale.

Quindi la ſcompoſizione dell'equazioni in fattori del ſecondo grado ſarebbe un mezzo onde avere le radici sì reali che imaginarie in eſſe contenute; mezzo però che non ha affatto luogo in quanto ſi tratterebbe ſempre di riſolvere non ſolo un'equazione, ma un'equazione eziandio di un grado più alto.

Per nulla laſciar poi indimoſtrato mi reſta provare che l'ultima equazion-quoziente che ſi ottiene ſcomponendo un'equazione di grado impari in fattori del ſecondo, è ſempre un'equazione reale di primo grado. Dimoſtrando che ogni equazione di grado impari ha in tutti i caſi una radice reale almeno di primo grado, è chiaro che reſta dimoſtrato nell'atto ſteſſo queſt'ultima mia ricerca. Paſſiamo adunque alla dimoſtrazione di queſt'altro teorema, e chiudiamo quindi con eſſo queſto diſcorſo.

In un'equazione

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \text{ec.} = 0$$

si può sempre dare ad x un valor tale quanto il primo suo termine x^m risulti maggiore della somma di tutti gli altri, e perciò quanto il valore del suo primo membro risulti col medesimo segno di questo suo termine. Questa proposizione tosto apparisce allorchè l'equazione proposta si mette sotto la forma

$$x^m\left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \text{ec.}\right) = 0.$$

In effetto considerandone il primo membro in se stesso, cioè indipendentemente dall'esser legato in equazione; riflettendo che i valori di x sono in esso circoscritti sol quando si riguardano legati in equazione, in quanto debbono darne sempre zero per risultato, ma che non sono ristretti da limite alcuno quando esso si considera indipendentemente di ciò, cioè come un seguito di termini solamente; essendo purtroppo chiaro che quanto grandi sieno questi valori nello sta-

to di queſta indipendenza ſene può ſempre concepire uu altro che li ſorpaſſi di quanto più ſi vorrà; oſſervando finalmente i termini

$$\frac{a}{x}, \frac{b}{x^2}, \frac{c}{x^3}, \text{ ec.}$$

di eſſo: ſi reſterà certamente convinto che può ſempre darſi ad x un valore n tanto grande quanto queſti termini divenendo piccioliſſimi la loro ſomma

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + \text{ec.} < 1$$

e perciò ſia

$$an^{m-1} + bn^{m-2} + cn^{m-3} + \text{ec.} < n^m$$

Quindi mettendo per x nell' equazione propoſta queſto numero n ſucceſſivamente col ſegno $+$ e $-$, ſi avrà per eſſere m impari, $x = \pm n^m$, e perciò il valore del ſuo primo membro riſultando con ſegno contrario ci convince che eſſa ha una radice reale tra $+n$ e $-n$: radice di cui ſene hanno i limiti più ſtretti o, $+n$ quando l' ultimo termine è negativo; o, $-n$ quando è

positivo; e ciò perchè l'equazione si riduce sempre a quest'ultimo termine, cioè risulta col medesimo segno di esso, quando si suppone $x = 0$. Qui si osservi così di passaggio che quando quest'ultimo termine è negativo ne' gradi pari, allora il primo termine essendo sempre positivo, fa che il valore dell'equazione col farvi successivamente $x = n = 0 = -n$ risulti col segno $+, -, +$, e ci convinca perciò che essa ha almeno due radici reali tra $0, +n$, e $0, -n$, cioè l'una positiva e l'altra negativa.

PROBL. 36.

Trovare per approssimazione la radice dell'equazione

$$x^3 - 13x + 5 = 0$$

161. L'enunziazione di questo problema sembra che voglia indicarci di essere una sola la radice reale della propostavi equazione. Ma è purtroppo facile il vedere (l. 392) che essa ha tali tutte tre le sue radici: locchè si è ancor da noi veduto (100)

Varj sono i metodi di approssimazione immaginati finora degli Analisti. L'analisi e la trigonometria ancora ha de' suoi particolari,

Non parlo de' ſecondi, poichè il caſo noſtro, eſſendo nel caſo irriducibile, ſi sà trattare per quanto abbiamo noi detto (149). Per ciò riguarda i primi veggo che il primo paſſo a tutti comune ſi è quello di trovarne un limite, ed il ſecondo di approſſimar ſempreppiù queſto limite al vero ſuo valore. Il metodo di cui l'autore ſi ſerve mi ſembra alquanto imperfetto ed inviluppato. Quindi per queſta e per la ragione di far conoſcere in breve la varietà de' metodi, io mi ſon determinato per quello di Mayer (79), onde trovare i limiti delle radici cercate, e di avvicinarmi ſempreppiù da queſti al vero valore di eſſe col variare il metodo come dovrò variarne la ricerca.

162. Prendo adunque (100) i limiti 0, -3, $+3$ delle radici dell' equazione enunciata, e partendo dal primo di eſſi incomincio ad avvicinarmi a quella che gli corriſponde, giuſta il metodo che il noſtro Lagrange cene ha dato nelle Memorie di Berlino per gli anni 1767. 1768.

163. Sia $ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \text{ec.} = 0$ l'equazione propoſta. Sia l il limite inferiore della radice che ſi cerca, e perciò $x \geq l$, e $< l + 1$;

Sia finalmente $x = l + \frac{1}{x'}$; onde avremo una trasformata della forma

$$a'x'^m + b'x'^{m-1} + c'x'^{m-2} + \text{ec.} = 0;$$

trasformata che ha una radice reale > 1, perchè $\frac{1}{x'} > 0$, e < 1. Il metodo ſteſſo (100) ci dà un limite l' per queſta radice, e ci guida a ſupporre perciò $x' = l' + \frac{1}{x''}$, onde averne una nuova trasformata della ſteſſa forma

$a''x''^m + b''x''^{m-1} + c''x''^{m-2} + \text{ec.} = 0$. Con un raziocinio analogo al precedente dico che eſſa ha una radice reale > 1, il di cui limite chiamato l'' mi porta a ſupporre $x'' = l'' + \frac{1}{x'''}$, onde averne un'altra trasformata co' medeſimi caratteri della prima, e così di ſeguito. L'equazioni

$$x = l + \frac{1}{x'}, x' = l' + \frac{1}{x''}, x'' = l'' + \frac{1}{x'''}, \text{ ec.}$$

ci danno il valor di

$$x = l + \cfrac{1}{l' + \cfrac{1}{l'' + \cfrac{1}{l''' + \text{ec.}}}}$$

ci danno cioè x in frazione continua: donde avremo (52.IV) le frazioni convergenti verso di essa, e però le diverse approssimazioni per x.

164. Questo metodo non solo ci avvicina continuamente alla radice cercata, ma ci porta ancora al vero suo valore, quando esso lo è commensurabile, poichè in tal caso una delle trasformate ci darà esattamente in uno de' limiti l, l', l'', ec. la radice reale positiva. Noi andiamo a vedere l'applicazione di questo metodo alla prima delle radici, che formano il soggetto delle nostre ricerche; applicazione che esponiamo in una tavola ragionata, onde renderla più semplice, e tenerne sott'occhi tutte le parti.

Equazione propoſta, in cui $l = 0$

$$x^3 - 13x + 5 = 0$$

I. ipot. $x = 0 + \frac{1}{x'} = \frac{1}{x'}$;

Trasf corrif. $x'^3 - \frac{13}{5}x' + \frac{1}{5} = 0$

Valori di $x' = 1, = 2, = 3, =$ ec.

Serie corrif. $-\frac{7}{5}, -\frac{11}{5}, +\frac{19}{5}$, ec ..

$l' = 2$; app:cor: $x = \frac{1}{2} = 0,5$

II. ipot $x' = 2 + \frac{1}{x'''} = \frac{2x''' + 1}{x'''}$;

Trasf.corrif. $x''^3 - \frac{8}{11}x''^2 - \frac{17}{11}x'' - \frac{5}{11} = 0$

Valori di $x'' = 1, = 2, =$ ec.

Serie corrif. $-\frac{19}{11}$, $+\frac{17}{11}$, ec.

$l'' = 1$; appr.corr. $x = \frac{1}{3} = 0,3333$

III. ipot. $x'' = 1 + \frac{1}{x'''} = \frac{x''' + 1}{x'''}$

Traf. corrif. $x'''3 - \frac{25}{19}x''' - \frac{11}{19} = 0$

Valori di $x''' = 1, = 2 =$ ec.

Serie corrif. $-\frac{17}{19}, \quad + \frac{91}{19}$, ec.

$f''' = 1$; app. corr. $x = \frac{2}{5} = 0,4$

IV. ipot. $x''' = 1 + \frac{1}{x''''} = \frac{x'''' + 1}{x''''}$

Traf. corrif. $x''''3 - \frac{32}{17}x'''^2 - \frac{57}{17}x''' - \frac{19}{17} = 0$

Valori di $x'''' = 1, = 2, = 3, = 4, =$ ec.

Serie corrif. $-\frac{91}{17}, -\frac{125}{17}, -\frac{19}{17}, +\frac{320}{17}$, ec.

$f'''' = 3$; app. corr $x = \frac{7}{18} = 0,3889$

V. ipot. $x''' = 3 + \frac{1}{x^v} = \frac{3x^v + 1}{x^v}$

Traſ. corriſ. $x^{v3} - \frac{210}{19} x^{v2} - \frac{121}{19} x^v - \frac{17}{19} = 0$

Valori di $x^v = 1 = 2 = 3 = 4 = 5 = 6 = 7, = 8 = 9 = 10 = 11 = 12 =$ ec.

Serie corriſp.

$$-\frac{329}{19}, -\frac{947}{19}, -\frac{1757}{19}, -\frac{2645}{19},$$

$$-\frac{3497}{19}, -\frac{4199}{19}, -\frac{4637}{19}, -\frac{4697}{19},$$

$$-\frac{4265}{19}, -\frac{3227}{19}, -\frac{1469}{19}, +\frac{1123}{19}, \text{ ec.}$$

$1^v = 11$; app. corr. $x = \frac{79}{203} = 0,3892$

VI. ipot. $x^{VI} = 11 + \frac{1}{x^{VI}} = \frac{11x^{VI} + 1}{x^{VI}}$

Traſcorrif. $x^{VI\,3} - \frac{2156}{1469} x^{VI\,2} - \frac{417}{1469} x^{VI} - \frac{19}{1469} = 0$

Valori di $x^{VI} = 1, = 2, = 3, =$ ec.

Serie corrif. $- \frac{1123}{1469}, + \frac{2275}{1469}$, ec.

$l^{VI} = 1$; app.corr. $x = \frac{86}{221} = 0,3891$

VII. ipot. $x^{VI} = 1 + \frac{1}{x^{VII}} = \frac{x^{VII} + 1}{x^{VII}}$

Tr.cor. $x^{VII\,3} + \frac{322}{1123} x^{VII\,2} - \frac{2551}{1123} x^{VII} - \frac{1469}{1123} = 0$

Valori di $x^{VII} = 1, = 2, = 3, =$ ec.

Serie corr. $+ \frac{2575}{1123}, + \frac{97}{1123}, - \frac{24997}{1123}$, ec.

$l^{VII} = 3$; app.corr. $x = \frac{251}{645} = 0,3891$.

L'identità che io oſſervo nelle quattro prime cifre decimali delle due ultime approſſimazioni, mi fa dire e conchiudere che 0, 3891 è la radice eercata.

165, Per trovare la ſeconda di queſte radici parto del ſuo limite −3, e chiamata y la correzione che vi corriſponde, paſſo a ſupporre nella propoſta $x = -(3+y)$, onde avrò la trasformata $y^3+9y^2+14y+17=0$. Rifletto quindi che y è ſempre <1, e che queſta operazione non è che di approſſimazione, e perciò vengo a traſcurarvi y^3 come aſſai picciolo, onde averne l'equazione $9y^2+14y+17=0$, e da eſſa $y=0,8$, e però $x=-3,8$

166. Per avvicinarmi ſempreppiù al vero valore della radice in queſtione, chiamo z la correzione da farſi al trovato valore di x, e ſuppongo perciò nella propoſta $x=-(3,8+z)$: donde avrò una nuova trasformata

$$z^3+11,4z^2+30,3z+0,47=0;$$

In quest'equazione essendo z assai picciola non solo può trascurarsi z^3, come nella precedente, ma ancora $11,4z^2$ perchè pure può riguardarsi come insensibile. Quindi $30,3z+0,47=0$, ed $y=-0,0155$, $x=-3,7845$. Operando così ci avvicineremo di vantaggio al vero valore della radice.

Ad imitazione intanto del caso precedente ne espongo in una tavola tutta l'operazione.

Equaz. proposta, il limite della cui radice $=-3$

$$x^3-13x+5=0$$

I. Supp. $x=-(3+y)$

Trasf.compl. $y^3+9y^2+14y+17=0$

Tras. di appr. $y^2+\frac{14}{9}y-\frac{17}{9}=0$

che ci dà $y=0,8$, ed $x=-3,8$

II. Supp. $=-(3,8+z)$

Trasf compl $z^3+11,4z^2+30,3z+0,47=0$

Tras.di appr. $30,3z+0,47=0$,

che ci dà $z=-0,0155$, ed $x=-3,7845$

III. Supp. $x = -(2,7845+u)$

Tr.comp. $u^3+11,35u^2-29,7672u-0,0046=0$

Traſ.di app. $29,7672u+0,0046=0$

che ci dà $u=-0,0001$, ed $x=-3,7843$

IV. Supp. $x=-(3,7843+t)$

Tr.comp. $t^3+11,35t^2+29,2939t+0,0003=0$

Traſ.di appr. $29,2939t+0,0003=0$,

che ci dà $t=-0,00001$, ed $x=-3,7843$.

E' l' uniformità delle prime quattro decimali che mi fa terminare la tavola, e conchiudere che $-3,7843$ ſi è la ſeconda delle radici cercate.

167. Per aver la terza di queſte radici vi applico il metodo indiretto delle doppie falſe poſizioni. Incomincio adunque a preparare una formula, onde averne la correzione corsiſpondente al ſuo limite con maggior prontezza di quello ſi ottiene col metodo ordinario (l. 316)

168. Sia $x^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+$ ec. $=v$ l' equazione propoſta; ſia dato ad x un valore x' tale, che ſi abbia $x-x'=i$. Quindi è chiaro che do-

vrà averſi per v un valor falſo v': Io faccio $v - v' = h$, ed avrò $x = x' + i$, $v = v' + h$; valori che ſoſtituiti nell' equazione propoſta ci dà

$$x'^m + mx'^{m-1}i + \frac{m(m-1)}{2}x'^{m-2}i^2$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}x'^{m-3}i^3 + \text{ec.}$$

$$+ bx'^{m-1} + b(m-1)x'^{m-2} + \frac{b(m-1)(m-2)}{2}x'^{m-3}$$

$$+ \frac{b(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot 3}x'^{m-4} \text{ ec.}$$

$$+ cx'^{m-2} + c(m-2)x'^{m-3} + \frac{c(m-2)(m-3)}{2}x'^{m-4}$$

$$+ \frac{c(m-2)(m-3)(m-4)}{2\cdot 3}x'^{m-5} \text{ ec.}$$

ec. ec. ec.

$= v' + h$

Maneggiando queſto metodo ſotto la condizione che i ſia aſſai picciolo, veggo che ſi poſſono ſenza errore ſenſibile traſcurare tutti i termini colle potenze di i ſuperiori alla prima e

che può prendersi per prossimamente vera l'equazione $x'^{m}+bx'^{m-1}+cx'^{m-2}+$ ec. $=v$.

Quindi si avrà

$$(mx'^{m-1}+b(m-1)x'^{m-2}+c(m-2)x'^{m-3}\text{ec.})i=h:$$

donde

$$i=\frac{h}{mx'^{m-1}+b(m-1)x'^{m-2}+c(m-2)x'^{m-3}\text{ec.}}$$

Applicando questa formula al caso della nostra ricerca si avrà $m=3, b=0, c=-13, v=-5$, ed $i=\frac{h}{3x'^{2}-13}$. Se suppongo $x'=3$, avrò che la proposta $x(13-x^{2})=5$ si riduce a $12=5$; locchè mi dà $h=7$; valore che per essere troppo grande mi dà i contro l'ipotesi. Quindi senza venire al calcolo di i passo ad una seconda ipotesi: ma siccome il calcolo precedente mi dice che il valor di x dee esser maggiore dell'assunto, così passo a supporre $x=3,5$, e vengo il tutto a metterlo sott'occhi in una tavola

I ip. $x'=3,5$; $h=-0,38$; $i=-0,1002$; $x=3,3998$;
II ip. $x'=3,4$; $h=-0,1$; $i=-0,0046$; $x=3,3952$
III. ip. $x'=3,395$;

che non ci dà correzione alcuna pel trovato valor di x, e perciò ci da 3,3952 per l'ultima delle radici cercate. Quindi 0, 3891; −3,7843; 3,3952 ſono le radici approſſimate dell' equazione propoſta; e che abbiamo trovato con tre metodi diverſi, come ſul principio promiſe.

PROB. 37.

169. *Trovare la radice della equazione generale.*

$$x^n - \frac{n(n-1)}{2}abx^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}ab(a+b)x^{n-3}$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4}ab(a^2+ab+b^2)x^{n-4} \text{ ec.} = 0$$

Io non veggo che l'equazione enunciata poſſa andar ſoggetta a quelle conſiderazioni generali che gli analiſti han fatto fin' ora ſull' equazioni. Io vi veggo al contrario un carattere tutto proprio e particolare. L' eſpreſſione che nell'enunciazione ſi uſa *di equazione generale* non può eſſere che relativa a quelle ſoltanto della ſua forma. Alcune oſſervazioni adunque particolari ſopra di eſſa ſon quelle che guidar mi dovranno, onde ſcoprire la forma di quella radice, che fa il ſoggetto di queſto problema.

178 Conſiderando ſulla forma e ſul progreſſo de' termini di queſta equazione, io vi ſcopro che manca in eſſa il ſecondo; che la ſerie degli eſponenti di x, e della parte in n de' ſuoi coefficienti, è quell'iſteſſa della potenza n di un binomio; che l'altra parte di queſti coefficienti non contiene che le ſole quantità a, b, in dui ſi offerva conſtantemente un fattore ab; che queſto fattore è moltiplicato ne'termini ſucceſſivi per 1, $a+b$, a^2+ab+b^2, ec. qual'è la ſola parte in cui non ſi vede una legge manifeſta. Per dare queſta legge a queſta parte dell'equazione onde più chiaramente diſtinguerne la natura, io veggo eſſere un paſſo legittimo il moltiplicarne i termini per un certo fattore. Per iſcoprire la natura, di queſto fattore non ricorro, che all'oſſervazione, la quale eſpreſſamente mi dice, che eſſo dee contenere le ſole quantità a,b, e che avendo la forma $a-b$ e dell'intuito capace a ſoddisfare alla noſtra ricerca: peronde diviene

$$a-b,\ a^2-b^2,\ a^3-b^3 \text{ ec.}$$

Altro non ci resta per completare l'equazione proposta, e metterla insieme sotto una legge costante, che determinare la forma del secondo suo termine. Niente più facile di questo. E' la legge con cui camminano le quantità

$a-b$, a^2-b^2, a^3-b^3, ec. quella che ci mostra essere $a^\circ - b^\circ$ la quantità che dee in essa moltiplicarne ab, ciocchè lo riduce a zero. Quindi l'equazione della nostra enunciazione diviene

$$(a-b)x^n - nab(a^\circ - b^\circ)\,x^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2}ab(a-b)x^{n-2}$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}ab(a^2-b^2)x^{n-3}$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 3\cdot 4}ab(a^3-b^3)x^{n-4}\text{ec.} =$$

$$a\left(x^n + nbx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}b^2x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}b^3x^{n-3}\text{ec}\right)$$

$$-b\left(x^n + nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}a^2x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}a^3x^{n-3}\text{ec}\right)$$

$= a(x+b)^n - b(x+a)^n = o$: donde si ottiene

$(x+b)\sqrt[n]{a} = (x+a)\sqrt[n]{b}$, e però $x = \dfrac{a\sqrt[n]{b} - b\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}}$

Fine del Primo Tomo

Tavola degli errori a correggersi

Errori	*Correzioni*
Pag.32.l.9.e l.7,r e $\sqrt{\left(\frac{ab-a^3}{12a}\right)}$	x e $\sqrt{\left(\frac{4b-a^3}{12a}\right)}$
26.l.12.$3x+2$	$2x+2$
27.l.16.$x=\frac{a-cy}{6}$	$x=\frac{a-cy}{b}$
68. l.1.irazione	frazione convergente
ivi l.8. de'numeri più piccioli	de' numeri più piccioli ma sempre nella serie de'termini delle frazioni convergenti,
70.l.9 esprimersi	esprimersi da un' altra
81.l.ult. $\frac{e''}{tx''}$	$\frac{e''x}{t''}$
112.l.10 $\frac{z+3}{y}$	$\frac{z+3}{3}$
116.l.6. Assediati	Assedianti
129. l.7. r^2	r
131.l.3.e l.8;u e q	p e q_2
135.l.14.St	Sx
136.l,ult.(S1)	(B)
153.l.10. $t=y+z_m$	$z=x+y_m$
162.l.11.2	$\frac{2}{2}$
176.l.15.6$(2z-1)=0$	$z-3=0$
201.l.8,$v=$	$x=$
240. l.8.$+ax+c$	$-ax+c$
248:l,ult.$r+r'=prr^2$	$r+r'+prr^2$

TAVOLA DELLE MATERIE

Dimoſtrazione della regola del maſſimo commun diviſore cavata dalla teoria delle frazioni continue. num 1. pag. 9.

Dimoſtrazione algebrica e però generale della nota regola ſul compendio della moltiplicazione e diviſione de' decimali. 2. 13.

Soluzione di alcuni Problemi di primo e ſecondo grado. 16. 25.

Varj ed utili teoremi dimoſtrati ſu i numeri 29 33.

Teoria delle frazioni còntinue 45 48.

Dimoſtrazione di un tecrema ſulle progreſſioni aritmetiche, e geometriche, oggi dette ſerie a differenze e a quoziente 57. 76.

Alcuni problemi riſoluti ſulla regola del tre ed altre regole ad eſſa ſubalterne. 78. 58.

Applicazione del metodo de' coefficienti indeterminati allo ſviluppo in ſerie di alcune algebriche frazioni. 68. 88.

Calcolo di una formula generale onde ſommare i rotti decimali periodici ſieno perfetti ſieno imperfetti. 69. 93.

Tratto rapido ſull' origine diſtinzione ed interpolazione delle ſerie. 71 95.

Applicazione della regola delle doppie falſe poſizioni all' equazione eſponenziale $r^r = 2000$ 72. 109

Metodo onde avere le radici razionali dell' equazioni mercè i diviſori dell'ultimo termine. 74. 112.

Teoria generale sulla soluzione numerica dell' equazioni; ed altri teoremi in essa dimostrati sull'equazioni in generale. 78. 116.

Scomposizione di una quantità algebrica ne' suoi fattori. 108. 165.

Metodo generale onde estrarre la radice qualunque m delle quantità della forma $a+\sqrt{b}$. 109 166

Soluzione algebrica dell' equazioni secondo il Bezout. 119. 181.

Dell'eliminazione ne'gradi superiori. 121. 182.

Il metodo Cardanico generalizzato per l' equazioni di tutti i gradi sieno pari, sieno impari. 133. 200.

Esame generale della formula Cardanica: caso irriducibile: suoi veri caratteri: dimostrazione dell' impossibile sua riduzione: ed un metodo trigonometrico generale onde averne in esso le radici. 142. 215

Due teoremi dimostrati sul modo onde scomporre l'equazioni del quarto grado in fattori del secondo 154. 234.

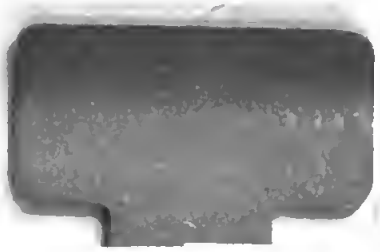
Dimostrazione assai semplice della proposizione d'Alembertiana sulle radici immaginarie. 260. 241.

Esposizione di tre metodi onde avere per approssimazione le radici dell'equazioni. 161. 253.

Soluzione dell' equazione $x^n - \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} +$

$\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}ab(a+b)x^{n-3}$ ec. $= 0$. 169. 260.

606738



Digitized by Google